平成 15 年度大学院修士課程入学試験問題
物理学 III、[3] 解答の指針 (非公式)

3a $B = 0$ であるので、$b(t) = 0$。与えられた微分方程式の第 1 式は、

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E_0 C_1(t) \tag{1}$$

となる。一般解は

$$C_1 = \alpha \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0 t\right) \tag{2}$$

であるが、$C_1(0) = 1$ より、$\alpha = 1$ と求まる。従って、

$$C_1 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0 t\right) \tag{3}$$

3b まず、$B = 0$ の場合、$C_2(t) = 0$ である。これは微分方程式を真面目に解いても勿論出るが、$\phi_1(\boldsymbol{x})$ と $\phi_2(\boldsymbol{x})$ の直交性と $|C_1(t)|^2 = 1$ からも自明。

従って、$C_1(t)$ と $C_2(t)$ を B で展開すると、以下のようになる。$C_2(t)$ に 0 次の項が無いことに注意。

$$\begin{aligned} C_1 &= f_0(t) + Bf_1(t) + B^2 f_2(t) + \mathcal{O}(B^3) \qquad (4)\\ C_2 &= Bg_1(t) + B^2 g_2(t) + \mathcal{O}(B^3) \qquad (5) \end{aligned}$$

もちろん、f_0 は [3a] の解そのものである。

展開した式を与えられた微分方程式に代入して、B の次数と B^2 の次数が 0 でなければいけない事から以下の連立微分方程式を得る (0 次は情報が無いので除いた)。

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar}E_0 f_1(t) \qquad (6)\\ \dot{f}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar}E_0 f_2(t) - \frac{i}{\hbar}\exp(-\lambda t) g_1(t) \qquad (7)\\ \dot{g}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar}(E_0 + A\exp(-\lambda t))g_1(t) - \frac{i}{\hbar}\exp(-\lambda t) f_0(t) \qquad (8)\\ \dot{g}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar}(E_0 + A\exp(-\lambda t))g_2(t) - \frac{i}{\hbar}\exp(-\lambda t) f_1(t) \qquad (9) \end{aligned}$$

実際は、C_2 は 0 次の項が無いので、g_1 だけ求まれば B^2 の範囲で $|C_2|^2$ が求まる。従って、上記の 4 つの式の内、3 番目の式を与えられた事項を参考に解けばそれで答えが求まる (f_0 は [3a] で求まっている)。

3c [3b] で与えた連立方程式の内、f_1 は初期条件 $f_1(0) = 0$ から 0 である。従って、[3b] で求めた g_1 を用いて、f_2 に関する微分方程式を与えられた事項を用いて求めればよい。

f_2 が求まれば、

$$|C_1(t)|^2 = (f_0(t))^2 + f_0(t) f_2(t) B^2 \tag{10}$$

から答えが得られる。