10 ケプラー問題

前章で学んだ 2 体問題に関する知識を用いて、太陽のまわりの惑星の運動を考察し、ケプラーの法則を導く。

10.1 惑星の軌道の方程式

惑星の質量を m_1、太陽の質量を m_2、太陽に対する惑星の相対位置ベクトルを $\vec{r}$ とする。その間の万有引力ポテンシャルの大きさは、

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{10.1}$$

である。角運動量 l をもつときの有効ポテンシャルは、遠心力ポテンシャルを考慮して、

$$V_{\text{eff}}(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{10.2}$$

である (図 10.1 参照)。

$$\frac{dV_{\text{eff}}(d)}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad d = \frac{l^2}{Gm_1 m_2 \mu} \tag{10.3}$$

より、V_{eff} は $r = d$ で極小となり、その極小値 V_{min} は、

$$V_{\text{min}} = -\frac{(Gm_1 m_2)^2 \mu}{2l^2} \tag{10.4}$$

となる。したがって、運動可能領域が存在する (運動エネルギーが負にならない) ためには、

$$E \geq V_{\text{min}} = -\frac{(Gm_1 m_2)^2 \mu}{2l^2} \tag{10.5}$$

でなければならない。

軌道の方程式は、

$$\theta = \theta_0 \pm \int_{r_0}^{r} \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{(2/\mu)(E - V_{\text{eff}}(r))}} dr \tag{10.6}$$

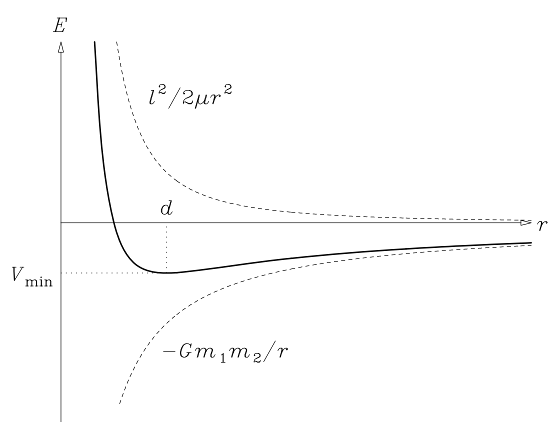

図 10.1: 惑星の運動に対する有効ポテンシャル。

である。ここで、最近接距離 (近日点) を r_0 とし、ある時刻に惑星が惑星が $r = r_0$ に位置したとき $\theta = 0$ となるように θ の原点を定めると、$\theta_0 = 0$ となる。さらに、$V_{\rm eff}$ として式 (10.2) を代入して、

$$
\begin{aligned}
\theta &= \pm \int_{r_0}^{r} \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{(2/\mu)(E - V_{\rm eff}(r))}} dr \\
&= \pm \int_{r_0}^{r} \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu E + 2\mu G m_1 m_2 / r - l^2/r^2}} dr \qquad (10.7)
\end{aligned}
$$

を得る。

式 (10.7) は、解析的に積分できる数少ない例の 1 つである。常套手段として、

$$
u = \frac{1}{r} \qquad (10.8)
$$

と変数変換をする。

$$
\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{r^2} = -du \qquad (10.9)
$$

であるから、式 (10.7) は、

$$
\begin{aligned}
\theta &= \mp \int_{u_0}^{u} \frac{l}{\sqrt{2\mu E + 2\mu G m_1 m_2 u - l^2 u^2}} du \\
&= \mp \int_{u_0}^{u} \frac{1}{\sqrt{-u^2 + (2\mu G m_1 m_2 / l^2) u + 2\mu E / l^2}} du \\
&= \mp \int_{u_0}^{u} \frac{1}{\sqrt{-(u - \mu G m_1 m_2 / l)^2 + 2\mu E / l^2 + (\mu G m_1 m_2 / l)^2}} du \\
&= \mp \int_{u_0}^{u} \frac{1}{\sqrt{-(u - 1/d)^2 + 2\mu E / l^2 + (1/d)^2}} du \\
&= \mp \int_{u_0}^{u} \frac{1}{\sqrt{-(u - 1/d)^2 + \varepsilon^2 / d^2}} du \qquad (10.10)
\end{aligned}
$$

と書き直される。ここで、ε は、

$$
\varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2\mu E d^2}{l^2}} = \sqrt{1 + \frac{2 l^2 E}{(G m_1 m_2)^2 \mu}} = \sqrt{1 - \frac{E}{V_{\rm min}}} \qquad (10.11)
$$

である。運動可能領域では $E \geq V_{\rm min}$ であるから、ε は負でない実数である ($V_{\rm min}$ は負であることに注意)。

$u_0 = 1/r_0$ は式 (10.10) の分母が 0 になる点で、運動可能領域の u の上限 (r の下限) であり、具体的には、

$$
u_0 = \frac{1}{d}(1 + \varepsilon) \qquad (10.12)
$$

で与えられる。式 (10.10) の分母が 0 になるもう 1 つの点は、

$$
u_0' = \frac{1}{d}(1 - \varepsilon) \qquad (10.13)
$$

であるが、$u \geq 0$ であることに注意すると、

$\varepsilon < 1$ **のとき**　u_0' は u の下限 (r の上限) を与える

$\varepsilon \geq 1$ **のとき**　u_0' は u の下限は 0 で、r は無限大まで運動可能

であることがわかる。

さて、式 (10.10) の積分は解析的に行える。まず、式 (10.10) を、

$$\theta = \mp \int_{u_0}^{u} \frac{1}{(\varepsilon/d)\sqrt{1-[(u-1/d)/(\varepsilon/d)]^2}} du \tag{10.14}$$

と書き換えておく。ここで、

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\pm 1}{\sin\alpha} \tag{10.15}$$

であるので、

$$\cos\alpha = \frac{u-1/d}{\varepsilon/d} \tag{10.16}$$

とおくと、両辺を u で微分して、

$$\frac{d\cos\alpha}{du} = \frac{d\cos\alpha}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{\varepsilon/d} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{\varepsilon/d} = -\sin\alpha\, d\alpha \tag{10.17}$$

であるので、式 (10.14) に代入して、

$$\theta = \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \tag{10.18}$$

を得る。ここで、

$$\cos\alpha_0 = \frac{u_0-1/d}{\varepsilon/d} = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \tag{10.19}$$

であり、

$$\cos\alpha = \frac{u-1/d}{\varepsilon/d} \quad \rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{u-1/d}{\varepsilon/d} \tag{10.20}$$

である。したがって、式 (10.18) は、

$$\theta = \mp\cos^{-1}\frac{u-1/d}{\varepsilon/d} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{u-1/d}{\varepsilon/d} \quad \rightarrow \quad u = \frac{1+\varepsilon\cos\theta}{d} \tag{10.21}$$

となる。$u = 1/r$ であるので、最終的に軌道の方程式、

$$r = \frac{d}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{10.22}$$

を得る。

10.2　軌道の分類

式 (10.22) で表される曲線は、$r = 0$ を**焦点**とし、ε を**離心率**とする**円錐曲線**(円錐を平面で切ったときに、切り口として現れる曲線) で、

$0 \leq \varepsilon < 1$ のとき　**楕円**($\varepsilon = 0$ のとき**円**)

$\varepsilon = 1$ のとき　**放物線**

$\varepsilon > 1$ のとき　**双曲線**

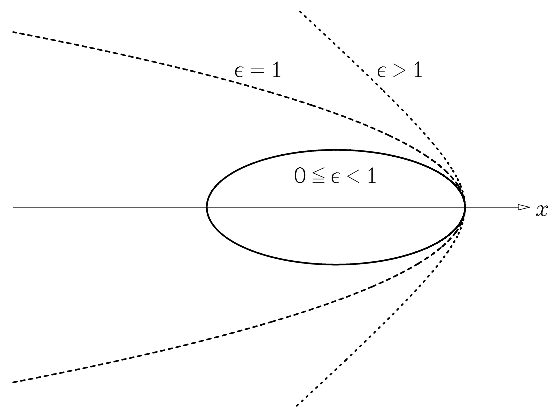

図 10.2: 円錐曲線。楕円 (実線) と放物線 (破線) と双曲線 (点線)。

を表す (図 10.2 参照)。

ここで、離心率 ε と E と $V_{\rm min}$ の関係、

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{V_{\rm min}}} \tag{10.23}$$

から、離心率と E は、

$0 \le \varepsilon < 1$ のとき	$V_{\rm min} \le E < 0$
$\varepsilon = 1$ のとき	$E = 0$
$\varepsilon > 1$ のとき	$E > 0$

の関係がある。このことは図 10.1 からも定性的に理解でき、

$E < V_{\rm min}$ のとき	運動可能領域がない
$V_{\rm min} \le E < 0$ のとき	r には上限と下限があり、軌道は楕円 (円) になる
$E \ge 0$ のとき	r は無限大になりえて、軌道は放物線または双曲線になる

ことが分かる。

10.3 ケプラーの惑星に関する第 1 法則

惑星は、太陽から無限に離れることがないので、$V_{\rm min} \le E < 0$ の場合にあたり、

$$\text{惑星は太陽を焦点とする楕円運動をする} \tag{10.24}$$

ことがわかる。これが**ケプラーの惑星に関する第 1 法則**である。

ここで楕円の性質をまとめておく (図 10.3 参照)。惑星が太陽に最も近づく点を**近日点**、最も遠ざかる点を**遠日点**というが、

近日点 $\theta = 0\,, \quad r = r_0 = \dfrac{d}{1+\varepsilon}$

遠日点 $\theta = \pi\,, \quad r = r_0' = \dfrac{d}{1-\varepsilon}$

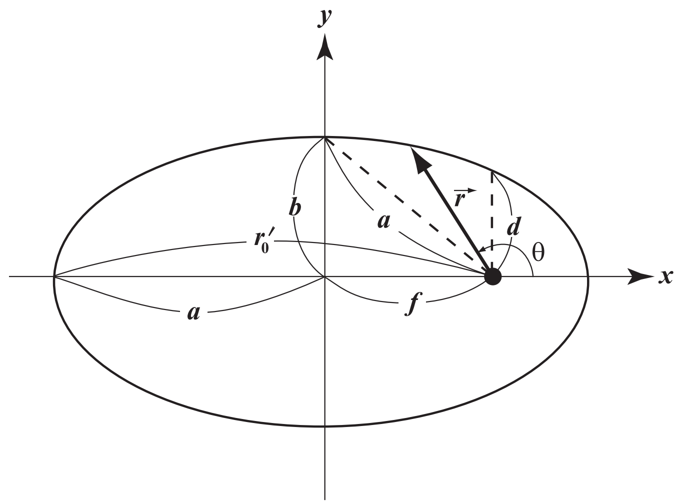

図 10.3: 楕円。$r = d/(1 + \varepsilon \cos\theta)$

である。したがって、長半径 a は、

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_0') = \frac{d}{1 - \varepsilon^2} \tag{10.25}$$

である。楕円の中心と焦点の距離 f は、

$$f = a - r_0 = \frac{1}{2}(r_0' - r_0) = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon a \tag{10.26}$$

である。これより、楕円の短半径は、

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{d}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \sqrt{ad} \tag{10.27}$$

で与えられる。

10.4 ケプラーの惑星に関する第 2 法則

ケプラーの惑星に関する第 2 法則、

$$\text{惑星の面積速度は一定である} \tag{10.28}$$

は、既に述べたように角運動量保存則の一部である。角速度が、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \tag{10.29}$$

で与えられるので、面積速度は、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2\mu} \tag{10.30}$$

と一定であることがわかる。

10.5 ケプラーの惑星に関する第 3 法則

楕円の面積は πab(a は長半径、b は短半径) であるから、楕円運動の周期 T は、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\pi ab}{dS/dt} = \frac{\pi ab}{l/2\mu} = \frac{\pi a\sqrt{ad}}{l/2\mu} \qquad (\because b = \sqrt{ad}) \\
&= \frac{\pi a\sqrt{al^2/(Gm_1m_2\mu)}}{l/2\mu} = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{Gm_1m_2/\mu}} \qquad (\because d = \frac{l^2}{Gm_1m_2\mu}) \\
&= \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{GM}} \qquad (\because \mu = \frac{m_1m_2}{M})
\end{aligned}
\tag{10.31}
$$

を得る。

ここで、惑星と太陽のように $m_1 \ll m_2$ なら、

$$M = m_1 + m_2 \approx m_2 \tag{10.32}$$

であるので、

$$T^2 \approx \frac{(2\pi)^3}{Gm_2}a^3 \tag{10.33}$$

となる。これが、

公転周期の 2 乗と、軌道の長半径の 3 乗の比は、惑星によらず一定

という**ケプラーの惑星に関する第 3 法則**である。