

11 加速度系での運動方程式 I 各論

ニュートンの運動方程式

$$m \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\Sigma} \right]_{\Sigma} = \vec{F}$$

は慣性系 Σ で成り立つ。

我々は多くの場合、地上に固定した座標系を暗に慣性系（絶対静止座標系）とみなしている。しかし、地球の自転や公転を考慮すると、この座標系は慣性系ではない。原理的には、地球の外に飛び出して、よりふさわしい¹慣性系を設定して問題を議論しなければならない。しかしながら、実際には、地上に固定した座標系で議論したい場合が多いし、時には、電車や宇宙船に固定した座標系で議論したい場合もある。

そこで本章では、慣性系 Σ に対して加速度運動している座標系 Σ' （単に加速度系と呼ぶ）から見た運動に対する運動方程式を考える。本章では、座標軸の方向は変わらない加速度系や、2次元回転座標系の様な簡単な各論を扱う。

11.1 座標原点が加速度運動する座標系

慣性系 $O-xyz$ 系 (Σ 系) と加速度系 $O'-x'y'z'$ 系 (Σ' 系) があり、 Σ' 系の座標軸は Σ 系に対して不変、

$$\left(\frac{d\vec{e}_x'}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{e}_y'}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{e}_z'}{dt} \right)_{\Sigma} = 0 \quad (11.1)$$

であるが、 Σ' 系の座標原点 O' が Σ 系に対して加速度 \vec{a} で運動している場合を考える (図 11.1 参照)。 Σ 系での運動方程式は、

$$m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\Sigma} \right]_{\Sigma} = \vec{F} \quad (11.2)$$

で与えられるものとする。

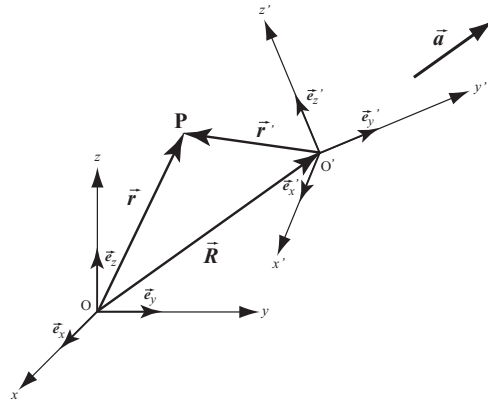


図 11.1: 慣性系 $O-xyz$ 系 (Σ 系) と加速度系 $O'-x'y'z'$ 系 (Σ' 系)。原点 O' が加速度 \vec{a} で運動。

¹絶対静止座標系は存在しないので。

点 O' の Σ 系での位置ベクトルを \vec{R} 、任意の点 P の位置ベクトルを Σ 系で \vec{r} 、 Σ' 系で \vec{r}' とすると、

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right) \right]_{\Sigma} = \vec{a} \quad (11.3)$$

である。

さて、 \vec{r}' を成分表示すると、

$$\vec{r}' = x' \vec{e}_x' + y' \vec{e}_y' + z' \vec{e}_z' \quad (11.4)$$

となる。 \vec{e}_x' などは、 Σ' 系の正規直行座標系のベクトルである。式 (11.1) から、速度に関して、

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{e}_x' + \frac{dy'}{dt} \vec{e}_y' + \frac{dz'}{dt} \vec{e}_z' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\Sigma'} \quad (11.5)$$

がわかる。従って、速度と加速度に対して、

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\Sigma'} + \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\Sigma} \quad (11.6)$$

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right]_{\Sigma} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \right]_{\Sigma'} + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right) \right]_{\Sigma} \quad (11.7)$$

が成り立つ。以上から、運動方程式 (11.2) は、

$$m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \right]_{\Sigma'} + m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right) \right]_{\Sigma} = \vec{F} \quad (11.8)$$

となる。

非慣性系 Σ に対しても方程式の左辺が、ニュートンの運動方程式と同様に、(質量) × (加速度) になるように書き直すと、

$$m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \right]_{\Sigma'} = \vec{F} - m\vec{a} \quad \left(\because \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right) \right]_{\Sigma} = \vec{a} \right) \quad (11.9)$$

となる。この余分な項 $-m\vec{a}$ を一つの見かけ上の力と考えると、式 (11.9) は慣性系でのニュートンの運動方程式と同じ形である。このような見かけの力を慣性力という。加速度系 Σ' で問題を考える場合、慣性力 $-m\vec{a}$ を導入して、運動方程式を式 (11.9) のように書けばよい。

慣性力の例 慣性力は見かけ上の力であるが、我々が日常で知覚する力でもある。たとえば図 11.2 の様に、電車が加速度 \vec{a} で右側に直進している場合を考える。

車外の A 君には、つり革の環は重力 $m\vec{g}$ とつり革の張力 \vec{T} を受けて右側に加速度 \vec{a} で運動していると見える。従って、A 君のたてる運動方程式は、

$$m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right]_{A} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \quad (11.10)$$

である。従って A 君は、張力は、

$$\vec{T} = m(\vec{g} - \vec{a}) \quad (11.11)$$

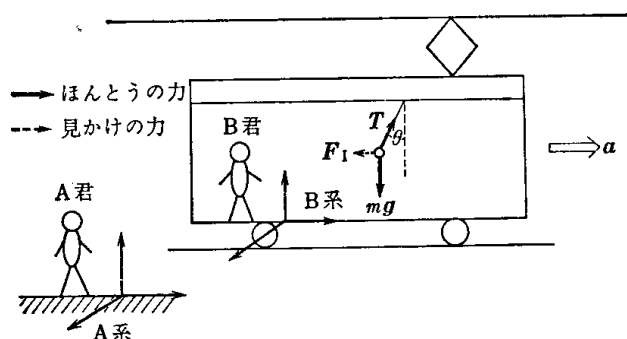


図 11.2: 慣性力の例。

つり革の傾き θ は、

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{g}|} \quad (11.12)$$

と結論する。

一方、車内の B 君は左側に押し倒されそうな力を感じ、つり革は後方に傾いて静止しているに見える。B 君はつり革が静止しているので、自分が加速度系にいるのを知らずに、運動方程式を、

$$m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \right]_{B,B} = 0 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_I \quad (11.13)$$

と書く。 \vec{F}_I は、つり革に働く左側に押し倒されそうな力である。そこでつり革の傾きから、

$$T \cos \theta = mg, T \sin \theta = F_I \quad \rightarrow \quad \tan \theta = \frac{F_I}{mg} \quad \therefore F_I = mg \tan \theta \quad (11.14)$$

を求める。式 (11.12) から、B 君が感じる力 \vec{F}_I は符号に注意して、

$$\vec{F}_I = -m\vec{a} \quad (11.15)$$

に等しいことが分かる。この \vec{F}_I が慣性力である。

以上から、慣性力 $\vec{F}_I = -m\vec{a}$ を考慮すれば、非慣性系でも運動方程式を慣性系と同形に書き表すことができることが分かる。

慣性力 \vec{F}_I が“真の力”と区別されるのは、B 君が自分が加速度運動していると認識した上でのお話である。仮に、電車から車外を見ることが出来ず、自分が運動しているか否か分からなければ、B 君は \vec{F}_I を慣性力とは考えず、重力 $m\vec{g}' = m(\vec{g} - \vec{a})$ が斜め後方に働いていると考えることになる。

11.2 2次元回転座標系

つぎは、座標軸の方向が変化する簡単な場合として、2次元の慣性系 $O-xy$ 系 (Σ 系) と原点を共通として、座標軸が等角速度 ω で回転する座標系 $O'-x'y'$ 系 (Σ' 系) を考える。

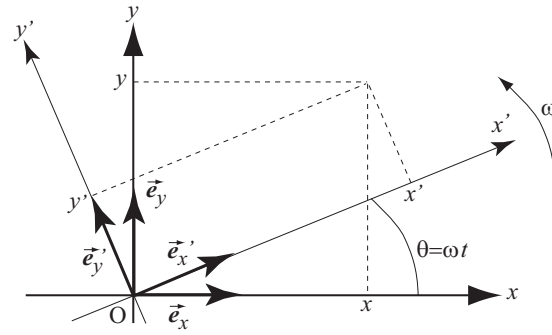


図 11.3: 等角速度 ω で回転する座標系 $O'-x'y'$ 。

図 11.3 のように、 x' 軸 (\vec{e}'_x 軸) が x 軸 (\vec{e}_x) となす角を θ とすると、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{一定} \quad (11.16)$$

である。任意の点 P の直交座標を、 Σ 系で (x, y) 、 Σ' 系で (x', y') とすると、

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (11.17)$$

であり、逆に、

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad (11.18)$$

である。

Σ 系でみた速度 \vec{v}_Σ を、 x' 、 y' 、およびそれらの微分で表す。 $d\theta/dt = \omega$ に注意して、

$$\begin{aligned} v_{\Sigma,x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \cos \theta - \omega x' \sin \theta - \frac{dy'}{dt} \sin \theta - \omega y' \cos \theta \\ v_{\Sigma,y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt} \sin \theta + \omega x' \cos \theta + \frac{dy'}{dt} \cos \theta - \omega y' \sin \theta \end{aligned} \quad (11.19)$$

となる。さらに時間で微分して、 Σ 系でみた加速度 \vec{a}_Σ を、 x' 、 y' 、およびそれらの微分で表すと、

$$\begin{aligned} a_{\Sigma,x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \cos \theta - 2\omega \frac{dx'}{dt} \sin \theta - \omega^2 x' \cos \theta - \frac{d^2y'}{dt^2} \sin \theta - 2\omega \frac{dy'}{dt} \cos \theta + \omega^2 y' \sin \theta \\ a_{\Sigma,y} &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \sin \theta + 2\omega \frac{dx'}{dt} \cos \theta - \omega^2 x' \sin \theta + \frac{d^2y'}{dt^2} \cos \theta - 2\omega \frac{dy'}{dt} \sin \theta - \omega^2 y' \cos \theta \end{aligned} \quad (11.20)$$

を得る。

ここで Σ 系でみた速度 \vec{v}_Σ の x' および y' 方向成分を求めると、

$$\begin{aligned} v_{\Sigma,x'} &= \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{e}'_x = v_{\Sigma,x} \cos \theta + v_{\Sigma,y} \sin \theta \\ &= \frac{dx'}{dt} - \omega y' \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} v_{\Sigma,y'} &= \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{e}'_y = -v_{\Sigma,x} \sin \theta + v_{\Sigma,y} \cos \theta \\ &= \frac{dy'}{dt} + \omega x' \end{aligned} \quad (11.22)$$

と、式(11.19)に比べてかなり簡単になる。ただし、これらは Σ' で見た速度 $\vec{v}_{\Sigma'}$ の x' および y' 方向成分とは一致していない。

同様に、 Σ 系でみた加速度 \vec{a}_{Σ} の x' および y' 方向成分を求めると、

$$\begin{aligned} a_{\Sigma,x'} &= \vec{a}_{\Sigma} \cdot \vec{e}_{x'} = a_{\Sigma,x} \cos \theta + a_{\Sigma,y} \sin \theta \\ &= \frac{d^2 x'}{dt^2} - \omega^2 x' - 2\omega \frac{dy'}{dt} \end{aligned} \quad (11.23)$$

$$\begin{aligned} a_{\Sigma,y'} &= \vec{a}_{\Sigma} \cdot \vec{e}_{y'} = -a_{\Sigma,x} \sin \theta + a_{\Sigma,y} \cos \theta \\ &= \frac{d^2 y'}{dt^2} - \omega^2 y' + 2\omega \frac{dx'}{dt} \end{aligned} \quad (11.24)$$

となり、こちらも式(11.20)に比べてかなり簡単になる。

力 \vec{F} の x' および y' 方向成分を $F_{x'}$ および $F_{y'}$ として、慣性系 Σ での運動方程式を、 x' 、 y' 、およびそれらの微分で表すと、

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} - \omega^2 x' - 2\omega \frac{dy'}{dt} \right) &= F_{x'} \\ m \left(\frac{d^2 y'}{dt^2} - \omega^2 y' + 2\omega \frac{dx'}{dt} \right) &= F_{y'} \end{aligned} \quad (11.25)$$

となる。

非慣性系 Σ' に対しても方程式の左辺が、ニュートンの運動方程式と同様に、(質量)×(加速度)になるように書き直すと、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= F_{x'} + m\omega^2 x' + 2m\omega \frac{dy'}{dt} \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= F_{y'} + \underbrace{m\omega^2 y'}_{\text{遠心力}} - \underbrace{2m\omega \frac{dx'}{dt}}_{\text{コリオリ力}} \end{aligned} \quad (11.26)$$

慣性力

となる。

右辺を“力”と解釈すると、再び慣性系には存在しない“見かけ上の”力が現れている。式(11.26)の右辺で、第2項の ω^2 に比例する項を遠心力、第3項の ω に比例する項をコリオリ力という。コリオリ力は、 Σ' 系から見たみた速度 $\vec{v}_{\Sigma'}$ に依存する。これら二つの力も慣性力と呼ばれる。すなわち、一般に非慣性系から見たため見かけ上現れる“力”を総称して慣性力という。

遠心力の例 遠心力もまた、我々が日常で知覚する力である。図11.4のように、半径 r の円周上を一定の速さ $r\omega$ で走る自動車に質量 m のB君が乗っており、車外からA君が眺めている場合を考える。

車外のA君(慣性系)から見ると、B君は角速度 ω の等速円運動、

$$x = r \cos(\omega t) \quad y = r \sin(\omega t) \quad (11.27)$$

をしている。従って、座席がB君に及ぼす水平方向の力 F_x と F_y は、

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 r \cos(\omega t) = -m\omega^2 x \\ F_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega^2 r \sin(\omega t) = -m\omega^2 y \end{aligned} \quad (11.28)$$

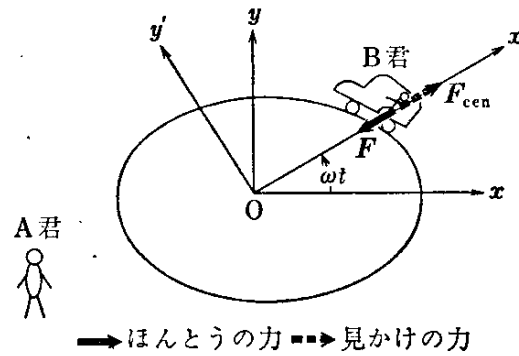


図 11.4: 慣性力の例。遠心力。

と考える。ベクトル表記では、

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r} \quad (11.29)$$

である。これは円運動を引き起こしている求心力と呼ばれる力である。

一方、車内の B 君は円の外側に放り出されそうな力 \vec{F}_{cen} を感じ、それが座席からの力 \vec{F} と釣り合うことにより車内に止まっている。従って、自動車に対して一定方向の座標軸を持つ座標系 (Σ' 系) で考えて、

$$m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \right]_{\Sigma'} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{cen}} = 0 \quad (11.30)$$

と運動方程式を表す。従って、

$$\vec{F}_{\text{cen}} = -\vec{F} = m\omega^2\vec{r} \quad (11.31)$$

であって、 \vec{F}_{cen} は軌道中心から円の外向きに働く力であり、遠心力と呼ばれるゆえんである。B 君に固定した座標系 (Σ' 系) では、

$$F_{\text{cen},x'} = m\omega^2x' \quad F_{\text{cen},y'} = m\omega^2y' \quad (11.32)$$

であり、式 (11.26) の右辺第 2 項に現れた力である。

コリオリ力の例 コリオリ力の例として、図 11.5 のように、等角速度 ω で回転するメリーゴーラウンドの水平かつ滑らかな床の上を、その中心から質量 m の物体を初速 v で x 軸方向に滑らした場合を考える。

メリーゴーラウンドの外から見ている A 君には、物体は単に初速度の方向に等速直線運動しているように見える。従ってその運動は、

$$x = vt \quad y = 0 \quad (11.33)$$

で表される。

一方、メリーゴーラウンド上の B 君は、自分が回転している板の上にいることを知らないとする。この場合、板の上に座標軸を描いて物体の運動を見たならば、物体は直進せず、図のような曲線を描くと見える (A 君から見れば、物体は直線運動していて、B 君の座標系が回転している訳だが、B 君は自分が回転していることを知らないので、物体が曲線運動していると判断する)。 $t = 0$

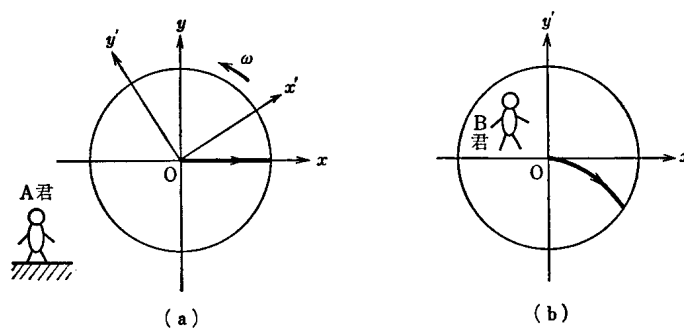


図 11.5: 慣性力の例。コリオリ力。

で B 君の描いた回転する座標系 $O'-x'y'$ と、A 君の慣性系 $O-xy$ が一致していたとすると $O'-x'y'$ 座標系での物体の軌跡は、

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) = vt \cos(\omega t) \\ y' &= -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) = -vt \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (11.34)$$

と表される。これは回転座標系での運動方程式 (11.26) で、真の力を $F_x = F_y = 0$ とした方程式、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= m\omega^2 x' + 2m\omega \frac{dy'}{dt} \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= m\omega^2 y' - 2m\omega \frac{dx'}{dt} \end{aligned} \quad (11.35)$$

を満足していることは直ちに分かる。右辺第 1 項の遠心力は B 君からみても、物体を加速はするが直線運動は変えない。B 君からみて物体が進行方向右側にずれていくのは式 (11.35) の右辺第 2 項に現れた見かけの力による。この力がコリオリ力である。

われわれは地球という回転系に乗っている。従ってその上で野球やボーリングをやる場合、球を真っ直ぐに投げたつもりでも、コリオリ力により北半球なら右へ、南半球なら左に厳密にはずれていく。

計算・メモ用余白