12　加速度系での運動方程式 II — 一般論 —

12.1　慣性系と加速度系の速度の関係

慣性系 O-xyz 系（Σ 系）と加速度系 O$'$-$x'y'z'$ 系（Σ' 系）を考える (図 12.1 参照)。質量 m の質点の、Σ 系での位置ベクトルを $\vec{r}$、その座標を (x, y, z) とし、Σ' 系での位置ベクトルを $\vec{r}'$、その座標を (x', y', z') とする。さらに、Σ' 系の原点 O$'$ の Σ 系での位置ベクトルを $\vec{R}$、その座標を (X, Y, Z) とすると、これらは、

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{R} + \vec{r}' && (12.1)\\
\vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z && (12.2)\\
\vec{r}' &= x'\vec{e}_x{}' + y'\vec{e}_y{}' + z'\vec{e}_z{}' && (12.3)\\
\vec{R} &= X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z && (12.4)
\end{aligned}
$$

である。

Σ 系からみた速度は、

$$\vec{v}_\Sigma = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_\Sigma = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \tag{12.5}$$

であり、Σ' 系からみた速度は、

$$\vec{v}_{\Sigma'} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\Sigma'} = \frac{dx'}{dt}\vec{e}_x{}' + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_y{}' + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_z{}' \tag{12.6}$$

である。式 (12.3) を時間で微分して、

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\left[\frac{dx'}{dt}\vec{e}_x{}' + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_y{}' + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_z{}'\right]}_{\vec{v}_{\Sigma'}} + \left[x'\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_y{}'}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_z{}'}{dt}\right] \tag{12.7}$$

であるので、$\vec{v}_\Sigma$ と $\vec{v}_{\Sigma'}$ の関係は、式 (12.1) から、

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\Sigma'} + \left[x'\left(\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt}\right)_\Sigma + y'\left(\frac{d\vec{e}_y{}'}{dt}\right)_\Sigma + z'\left(\frac{d\vec{e}_z{}'}{dt}\right)_\Sigma\right] + \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_\Sigma \tag{12.8}$$

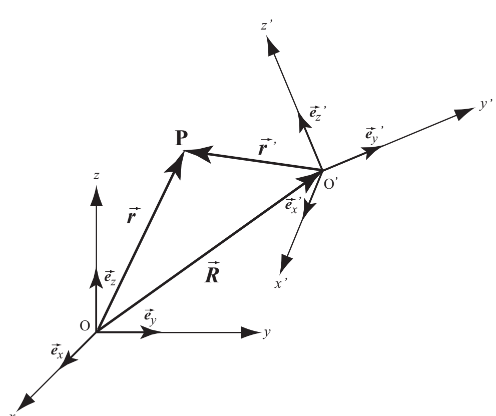

図 12.1: 慣性系 O-xyz 系（Σ 系）と加速度系 O$'$-$x'y'z'$ 系（Σ' 系）。一般の運動。

で与えられる。

ここで $(d\vec{e}_i{}'/dt)_\Sigma$ について考察する。規格化条件、

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_i{}' = 1 \qquad (i = x, y, z) \tag{12.9}$$

を Σ 系でみて時間で微分すると、

$$\left(\frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}\right)_\Sigma \cdot \vec{e}_i{}' + \vec{e}_i{}' \cdot \left(\frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}\right)_\Sigma = 2\vec{e}_i{}' \cdot \left(\frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}\right)_\Sigma = 0 \tag{12.10}$$

であるから、$(d\vec{e}_i{}'/dt)_\Sigma$ は $\vec{e}_i{}'$ と直交する。従って、

$$\left(\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt}\right)_\Sigma = \omega_{12}\vec{e}_y{}' + \omega_{13}\vec{e}_z{}' \tag{12.11}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_y{}'}{dt}\right)_\Sigma = \omega_{21}\vec{e}_x{}' + \omega_{23}\vec{e}_z{}' \tag{12.12}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_z{}'}{dt}\right)_\Sigma = \omega_{31}\vec{e}_x{}' + \omega_{32}\vec{e}_y{}' \tag{12.13}$$

と一般的に表すことが出来る。

次に直交条件、

$$\vec{e}_x{}' \cdot \vec{e}_y{}' = 0 \tag{12.14}$$

を Σ 系でみて時間で微分すると、

$$\left(\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt}\right)_\Sigma \cdot \vec{e}_y{}' + \vec{e}_x{}' \cdot \left(\frac{d\vec{e}_y{}'}{dt}\right)_\Sigma = 0 \tag{12.15}$$

であるから、式 (12.11)–(12.12) に代入して、

$$\omega_{12} + \omega_{21} = 0 \qquad \to \qquad \omega_{12} = -\omega_{21} \tag{12.16}$$

を得る。同様にして一般に、

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{12.17}$$

が成り立つ。そこで、

$$\begin{aligned} \omega_{z'} &\equiv \omega_{12} = -\omega_{21} \\ \omega_{x'} &\equiv \omega_{23} = -\omega_{32} \\ \omega_{y'} &\equiv \omega_{31} = -\omega_{13} \end{aligned} \tag{12.18}$$

と書き、ベクトル、

$$\vec{\omega} \equiv \omega_{x'}\vec{e}_x{}' + \omega_{y'}\vec{e}_y{}' = \omega_{z'}\vec{e}_z{}' \tag{12.19}$$

を定義すると、式 (12.11) は、

$$\left(\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt}\right)_\Sigma = \omega_{z'}\vec{e}_y{}' - \omega_{y'}\vec{e}_z{}' = \omega_{z'}\vec{e}_z{}' \times \vec{e}_x{}' + \omega_{y'}\vec{e}_y{}' \times \vec{e}_x{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_x{}' \tag{12.20}$$

と書ける。以下同様にして、一般に、

$$\left(\frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}\right)_\Sigma = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}' \tag{12.21}$$

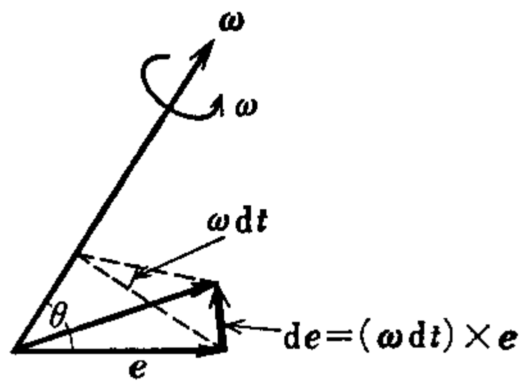

図 12.2: ベクトルの回転。

と表せることが分かる。

以上から、式 (12.8) の右辺の [ ] の部分は、

$$x'\left(\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt}\right)_\Sigma + y'\left(\frac{d\vec{e}_y{}'}{dt}\right)_\Sigma + z'\left(\frac{d\vec{e}_z{}'}{dt}\right)_\Sigma = \vec{\omega}\times(x'\vec{e}_x{}' + y'\vec{e}_y{}' + z'\vec{e}_z{}') = \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \tag{12.22}$$

となり、二つの座標系からみた速度の関係式 (12.8) は、

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_\Sigma \tag{12.23}$$

と表される。

12.2 角速度ベクトル

ベクトル $\vec{\omega}$ は、

座標系 Σ' が、座標系 Σ に対してもつ**角速度ベクトル**

と呼ばれ、Σ' 系の各座標軸が Σ 系から見て、$\omega = |\vec{\omega}|$ の大きさの角速度で、$\vec{\omega}$ の向きに右ネジが進む向きに回転していることを表している。以下、$\vec{\omega}$ の向きを回転軸の向きという。

以上のことを図 12.2 を用いて説明する。単位ベクトル $\vec{e}$ を、軸 $\vec{\omega}$ のまわりに角速度 ω で微小時間 dt 間回転したとする。$\vec{e}$ の変化量 $d\vec{e}$ は、向きが $\vec{\omega}\times\vec{e}$ で、大きさは、$\omega\, dt\cdot\sin\theta = |\vec{\omega}\times\vec{e}|dt$ である。従って、$d\vec{e} = \vec{\omega}\times\vec{e}\,dt$ である。これを、各 $\vec{e}_i{}'$ について表したのが式 (12.21) であり、前述の説明が成り立っていることが理解される。

12.3 加速度系での慣性力

式 (12.23) は、任意のベクトル $\vec{A}$ に拡張でき、

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_\Sigma = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times\vec{A} \tag{12.24}$$

と書ける。特に、$\vec{\omega}\times\vec{\omega}=0$ であるので、

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\Sigma}=\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\Sigma'} \tag{12.25}$$

が成り立つので、以下、ω の時間微分には添字を付けない。

式 (12.24) は、時間微分の公式、

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma}=\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma'}+\vec{\omega}\times \tag{12.26}$$

を覚えておくとよい。

加速度については、式 (12.23) に、$(d/dt)_{\Sigma}$ なる微分を行い、右辺について公式 (12.24) を用いると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{v}_{\Sigma}}{dt}\right)_{\Sigma} &= \left(\frac{d\vec{v}_{\Sigma'}}{dt}\right)_{\Sigma'}+\vec{\omega}\times\vec{v}_{\Sigma'}+\left(\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}{dt}\right)_{\Sigma'}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\Sigma}\right)_{\Sigma}\\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{\Sigma'}}{dt}\right)_{\Sigma'}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\Sigma'}+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\Sigma}\right)_{\Sigma}\end{aligned} \tag{12.27}$$

となり、公式、

$$\vec{a}_{\Sigma}=\vec{a}_{\Sigma'}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\Sigma'}+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\Sigma}\right)_{\Sigma} \tag{12.28}$$

を得る。ここで、$\vec{a}_{\Sigma}$ と $\vec{a}_{\Sigma'}$ はそれぞれ Σ 系および Σ' 系から見た加速度である。

Σ 系は慣性系であるから、運動方程式は、

$$m\vec{a}_{\Sigma}=\vec{F} \tag{12.29}$$

と書ける。これを左辺が、

(質量) $\times$ (Σ' 系での加速度)

となるように書き直すと、式 (12.28) より、

$$m\vec{a}_{\Sigma'}=\vec{F}-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{\Sigma'}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')-m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\times\vec{r}\,'-m\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\Sigma}\right)_{\Sigma} \tag{12.30}$$

となり、右辺には 4 種類の**慣性力**が現れている。

右辺第 2 項が $\omega v_{\Sigma'}$ に比例し**コリオリ力**である。実際、$\vec{\omega}$ を $\vec{e}_z\,'$ 方向、$\vec{r}\,'$ が $\vec{e}_x\,'$ と $\vec{e}_y\,'$ がつくる平面内にあるとすると、

$$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{\Sigma'}=\left(2m\omega\frac{dy'}{dt}\right)\vec{e}_x\,'-\left(2m\omega\frac{dx'}{dt}\right)\vec{e}_y\,' \tag{12.31}$$

となって、前章に表われたコリオリ力に一致する。右辺第 3 項は、$\vec{r}\,'$ の $\vec{\omega}$ に垂直な成分を $\vec{v}_{\perp}\,'$ とすると、$m\omega^2\vec{r}_{\perp}\,'$ となり、これはまさに座標系 Σ' の回転による**遠心力**である。右辺第 5 項は、前章の最初に議論した、原点 O′ の運動による慣性力である。第 4 項は、前章の議論では現れなかった、角速度の変化に由来する慣性力である。

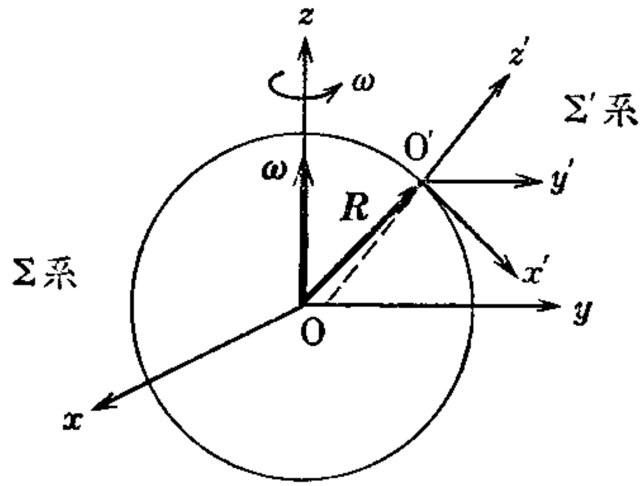

図 12.3: O-xyz 系 (Σ 系：慣性系) と、O′-$x'y'z'$ 系 (Σ′ 系：地面固定座標系)。

12.4　自由落下における地球の自転の影響

以下、地球の公転は無視して、地球の自転の影響を考える (図 12.3 参照)。地球の中心を原点とし、座標軸が太陽に対して静止している座標系を慣性系 Σ とする。z 軸を自転の回転軸にとり、自転の角速度の大きさを ω とすると、角速度ベクトルは、

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \tag{12.32}$$

である。ω は一定とし、その時間変化は無視する。

われわれが落下運動を観測する地上に固定した座標系 Σ' については、地上に原点をとり、鉛直上方に z' 軸、真南に x' 軸、真東に y' 軸をとる。

地球の質量を M、質量 m の質点の Σ 系での位置ベクトルを $\vec{r}$、Σ' 系での位置ベクトルを $\vec{r}'$ とする。地球がこの質点に及ぼす力は、万有引力

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{12.33}$$

である。従って、Σ' 系での運動方程式は、式 (12.30) より、

$$m\vec{a}_{\Sigma'} = m\left[\left\{-G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\Sigma}\right)_{\Sigma}\right\} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\Sigma'} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right] \tag{12.34}$$

となる ($d\vec{\omega}/dt = 0$ に注意)。

Σ' 系の原点 O′ の Σ 系に対してもつ加速度は自転によるもので、$\vec{R}$ は Σ' から見ると定ベクトルである (地球の中心を通る直線上) であるから、式 (12.24) を使って、

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\Sigma}\right)_{\Sigma} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) \tag{12.35}$$

と書ける ($(d\vec{R}/dt)_{\Sigma'} = 0$ と $d\vec{\omega}/dt = 0$ に注意)。地球表面の現象では、$r' \ll R \approx 6400\,\mathrm{km}$ であるから、式 (12.34) の万有引力項は、

$$-G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \approx -G\frac{M}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} \tag{12.36}$$

と近似できる。従って、式 (12.34) の右辺 { } でくくった部分は、$\vec{R}$ は Σ' 系から見ると定ベクトルであるから、

$$\vec{g} \equiv -G\frac{M}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \tag{12.37}$$

で定義される、質点によらず Σ' 系では一定のベクトル $\vec{g}$ が得られる。この $\vec{g}$ が地上で測定される**重力加速度ベクトル**である。これが万有引力と点 O′ での自転による遠心力により定まっていることが式 (12.37) より分かる。落下運動を記述する時の "鉛直方向" とは、この $\vec{g}$ の方向であり、両極と赤道を除いて、鉛直線は地球の中心を通らない (図 12.4 参照)。式 (12.36) の近似で、Σ' 系での運動方程式は、

$$ma_{\Sigma'} = m\left[\vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\Sigma'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')\right] \tag{12.38}$$

となる。

12.5 座標原点が加速度運動する座標系

地球の角速度の大きさは

$$\omega = \frac{2\pi}{86400}\,\mathrm{s}^{-1} = 7.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \sim 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{12.39}$$

である。一方、自由落下のような身のまわりの現象では、r' や $v_{\Sigma'}$ はそれぞれ m や m/s で測るのが適当な程度の大きさである。従って、式 (12.38) の右辺各項の大きさは、

$$\begin{aligned} |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')| &\sim (10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1})^2 \cdot 1\,\mathrm{m} \sim 10^{-8}\,\mathrm{m/s^2} \\ |2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\Sigma'}| &\sim (10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot 1\,\mathrm{m/s} \sim 10^{-4}\,\mathrm{m/s^2} \\ |\vec{g}| &\sim 10\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned} \tag{12.40}$$

程度であるので、

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')| \ll |2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\Sigma'}| \ll |\vec{g}| \tag{12.41}$$

が成り立つ。そこで、式 (12.38) で右辺 [ ] 中の第 2 及び第 3 項を無視したのが、以前調べた自由落下である。

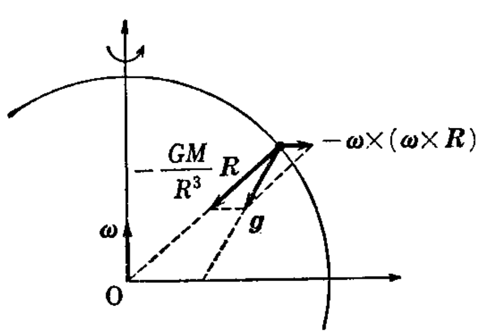

図 12.4: 重力加速度ベクトル。

式 (12.41) は ω が非常に小さいことに起因している。そこで、ここでは ω の 1 次まで、すなわちコリオリ力の項までとって問題を考える。運動方程式は、

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \tag{12.42}$$

と書ける。以下、時間微分の添字 Σ' は省略する。

$\vec{r}'$ を、ω のべき

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \omega\vec{s}_1 + O(\omega^2) \tag{12.43}$$

と展開して、式 (12.42) に代入して、ω の次数の等しい項を比較すると、

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{g} \tag{12.44}$$

$$\omega\frac{d^2\vec{s}_1}{dt^2} = -2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_0}{dt} \tag{12.45}$$

$$\tag{12.46}$$

となる (ω^2 以上は無視した)。

初速度 0 での位置 $\vec{h}$ からの自由落下の初期条件は、$t = 0$ で、

$$\vec{r}_0 = \vec{h}, \quad \frac{d\vec{r}_0}{dt} = 0, \quad \vec{s}_1 = 0, \quad \frac{d\vec{s}_1}{dt} = 0 \tag{12.47}$$

とおけるから、まず方程式 (12.44) を解いて、

$$\vec{r}_0 = \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{12.48}$$

を得る。これを、方程式 (12.45) に代入して

$$\omega\frac{d^2\vec{s}_1}{dt^2} = -2(\vec{\omega} \times \vec{g})t \tag{12.49}$$

となる。これを 2 回積分すると、初期条件 (12.47) から、

$$\omega\vec{s}_1 = -\frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}\,t^3 \tag{12.50}$$

を得る。従って、求める解は、

$$\vec{r}' = \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}\,t^3 \tag{12.51}$$

となる。

さて、高さ h のところから、初速 0 で自由落下させたとき、地上に到達するまでの時間は、

$$t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{12.52}$$

であるから、落下地点は鉛直下方より、

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}(\vec{\omega} \times \vec{g}) \tag{12.53}$$

だけずれる。北緯 λ(鉛直線と赤道面のなす角) の地点では、

$$|\vec{\omega} \times \vec{g}| = \omega g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \omega g \cos\lambda \tag{12.54}$$

であるので、落下地点は東方に、

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \omega g \cos\lambda \tag{12.55}$$

だけずれる。

上記のことは、例えば東京タワー (高さ 333 m、北緯 36°) からものを落したとき、塔の先端が地表より速く東方に回転していることから容易に理解できる。ずれはどの程度だろうか?