2 運動の記述

力学とは、“物体の運動についての理論” と述べたが、物体の運動とは**物体の位置の時間変化**である。この理論を表現するには、まず、物体とか位置とか時間の表現方法を考える必要がある。

2.1 物体・位置・時間の記述

2.1.1 物体

物体を表現するために、理想化された極限として質点という概念を導入する。**質点**とは、大きさのない数学的な点で、後述の**質量**という物理的属性をもつものである。

物体は、以下の 2 つのいずれかの意味で質点として表現される。第一は、有限な大きさもつ物を近似的に点とみなす場合である。例えば太陽のまわりをまわる地球の運動を考える場合、大きさを無視し、全質量を各中心 (重心) に集中させる。そして、重心の運動を質点の運動と考えるわけである。この**モデル化**は、両者の大きさが、問題としている互いの距離に比べて十分小さいため、良い近似である。

第二のモデル化は、物体を多数の質点の集まり (**質点系**) として表現することである。例えば太陽や地球を細分化し、各微小部分を第一の意味で質点とみなし、太陽や地球をこれら質点の運動 (質点系の運動) として表そうという立場である。力学基礎では、主に 1 ないし 2 質点系を扱う。

2.1.2 時間

時間を表現するにはその 2 面性、すなわち “いつ” と “どれだけ” に注意する必要がある。日常生活では、“いつ” すなわち**原点**としてキリストの生年を、“どれだけ” すなわち**単位**としては太陽年を用いている。

物理学では、原点の取り方は任意である。単位については 1 秒 (1 s) が定義されており、現在は、^{133}Cs(セシウムの同位体) 原子に共鳴するある電波が 9192631770 回振動する時間として定義されている。

時間のもつもう 1 つの大切な性質はその方向性である。時間は未来から過去に逆行することはないが、この性質はニュートン力学からは理解されない。それは、ニュートンの運動方程式が時間に対して対称な (時間の向きを逆にしても何の変更も受けない) ため、時間の向きを区別できないためである。

2.1.3 位置

直交座標

質点の位置を表す方法はいろいろあるが、よく用いられるのが**直交座標 (デカルト座標)** である。空間の 1 点 O を基準点とし、この点で互いに直交する座標軸 (x 軸、y 軸、z 軸の 3 軸) を用意し、各々点 O を原点 (目盛 0) とする。図 2.1 のような 3 軸の取り方を**右手系**と呼ぶのに対して、3 軸共に逆向きにしたものを**左手系**と呼ぶ。

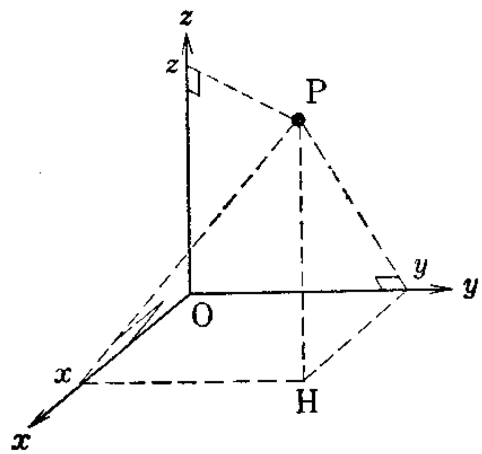

図 2.1: 直交座標系 (デカルト座標系) と直交座標 (x, y, z)。

直交座標では 3 軸の原点が一致するのが普通であるが、一般には原点が一致する (原点で交わる) 必要は無く、原点の取り方は任意である (問題に合わせて適切に設定すればよい)。したがって、座標は座標系を定めないと無意味である。

空間の質点 P の位置を表すには、点 P から各軸に垂線を下し、各軸との交点の目盛を用いて、(x, y, z) で表される。このように、点の位置は、基準にとる**座標系**とその座標系での**座標 (座標成分)** で指定される。

したがって、質点の運動は、質点の座標を

$$(x(t), y(t), z(t)) \tag{2.1}$$

と、時間の関数として表すことにより表現される。

円柱座標

らせん運動の記述等に用いられる座標系である。図 2.2 左において、点 H は点 P から xy 平面に垂線を下した足であり、ρ は OH の長さ、ϕ は x 軸と OH のなす角 (x 軸の正の方向から y 軸の正の方向に向けて正にとる) を用いて、円柱座標は (ρ, ϕ, z) で表される。直交座標系との関係は、

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z \tag{2.2}$$

で与えられる。

極座標

円運動や惑星の運動の記述等に用いられる。図 2.2 右において、H と ϕ は図 2.2 左に同じ、r は OP の長さ、θ は z 軸と OP のなす角 (z 軸の正の方向から xy 面に向けて正にとる) を用いて、極座標は (r, θ, ϕ) で表される。直交座標系との関係は、

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta \tag{2.3}$$

で与えられる。

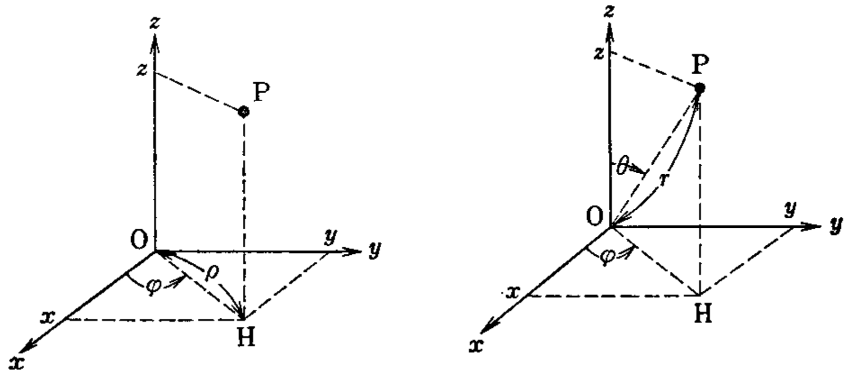

図 2.2: 左：円柱座標系と円柱座標 (ρ, ϕ, z)。右：極座標系と極座標 (r, θ, ϕ)。

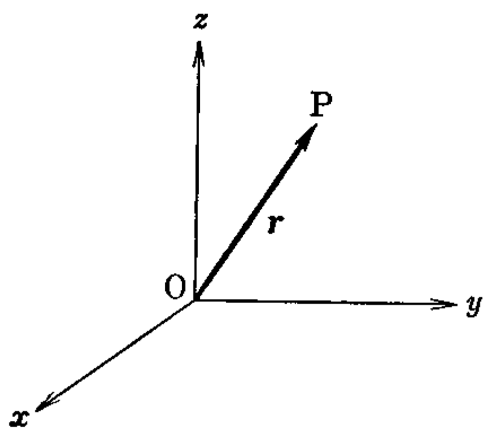

図 2.3: 位置ベクトル $\vec{r}$。

2.2 ベクトル表示

力学の法則を記述するに際して、質点の位置をいちいち、座標系を定めそれに関する座標を用いて表すよりも、位置ベクトルという概念を導入すると便利である。

図 2.3 のように、基準点 O から質点 P にベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を引く。これを抽象的に $\vec{r}$ と書き、点 P の点 O を基準点とする**位置ベクトル**という。これから分かるように、位置ベクトルの導入に際して、座標軸の設定は不用であるが基準点は必要である。

2.2.1 ベクトルとその性質

以下、ベクトルの性質について簡単にまとめておく。

まず**ベクトル (vector)** とは大きさと向きを持つ量であり、$\vec{A}$ または $\mathbf{A}$ と表される。物理学では後者のボールド体で表現するのが一般的であるが、本講義ノートでは前者を採用する (板書では前者の方が混乱が少ない為)。なお、ベクトルに対して、大きさのみを持つ量を**スカラー (scalar)** という。

ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の向きと大きさが等しいことを**ベクトルが等しい**といい、$\vec{A} = \vec{B}$ と表す。し

たがって、始点や終点は異なっていてもよい。

ベクトルの大きさは $|\vec{A}|$ で表すが、簡単に A と表す事もある。大きさが 0 のベクトルを**ゼロベクトル**といい $\vec{0}$ と表す (ゼロベクトルに向きはない)。また大きさが 1 のベクトルを特に**単位ベクトル**といい $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$) と表すことにする。

2.2.2 ベクトルの演算

ベクトルの加法

2 つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ が与えられた時、ベクトル和 $\vec{C}$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{2.4}$$

は、$\vec{A}$ の終点と $\vec{B}$ の始点を一致させたとき、$\vec{A}$ の始点から $\vec{B}$ の終点への矢印の表すベクトルとして定義される。

ベクトルの減法

逆に、$\vec{A}$ に加えると結果が $\vec{B}$ になるようなベクトル $\vec{d}$ を求める演算として減法が定義され、

$$\vec{d} = \vec{B} - \vec{A} \qquad (\vec{A} + \vec{d} = \vec{B}) \tag{2.5}$$

と表される。$\vec{d}$ は、$\vec{A}$ の始点と $\vec{B}$ の始点を一致させたとき、$\vec{A}$ の終点から $\vec{B}$ の終点への矢印の表すベクトルとして定義される。

$\vec{B}$ をゼロベクトルとすると、$\vec{d} = -\vec{A}$ となり、$\vec{A}$ の逆ベクトルが得られる。

スカラー倍

λ を任意の実数として、ベクトル $\vec{A}$ の λ 倍 (スカラー倍) は

$$\vec{B} = \lambda\vec{A} \tag{2.6}$$

と表される。$\vec{B}$ の大きさは $\vec{A}$ の大きさの $|\lambda|$ 倍で、$\lambda > 0$ なら $\vec{A}$ と同じ向き、$\lambda < 0$ なら逆向きと定義される。

2.2.3 位置ベクトルと座標

ベクトルの加法とスカラー倍を用いて、位置ベクトルと、与えられた座標系での座標との関係が簡単に表現される。

図 2.4 のような座標系を考える。各座標軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ とする。

スカラー倍の定義から、図 2.4 において

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x\vec{e}_x, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} = y\vec{e}_y, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{HP}} = z\vec{e}_z \tag{2.7}$$

である。ここで加法の定義から、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}}$ であるので、位置ベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{2.8}$$

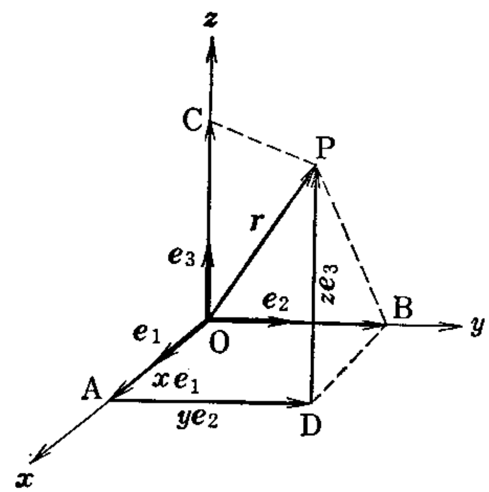

図 2.4: 正規直交座標系 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_x\}$。位置ベクトルは、$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ と表される。

と表される。$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ のように、互いに直交する単位ベクトルの組を**正規直交系**という。

位置ベクトル $\vec{r}$ は、基準点 O が変わらなければ変わらないが、座標 (x, y, z) は、O(基準点) はそのままでも座標軸の取り方を変えると変わってしまう。このことからも、物理の法則を位置ベクトルで表現する事の優位性が理解される。

2.3 速度

2.3.1 定義

図 2.5 に示すように、時刻 t に位置ベクトル $\vec{r}(t)$ で表される点が、時刻 $t + \Delta t$ に $\vec{r}(t + \Delta t)$ で表される運動を考える。この間の変位を表すベクトル

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \tag{2.9}$$

を**変位ベクトル**という。

速度(または**速度ベクトル**)$\vec{v}(t)$ は、Δt を無限に小さくした時の、単位時間当たりの変位ベクトルとして定義され、

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.10}$$

で定義される位置ベクトル $\vec{r}$ の時間微分で表される。速度ベクトルは軌道の接線方向を向いており、速度の大きさを**速さ**という。

今、空間に固定した座標系 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ (以下、**絶体静止座標系**という) を考える。この座標系で、$\vec{v}(t)$ を

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \tag{2.11}$$

と表すと、式 (2.8) より、

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \tag{2.12}$$

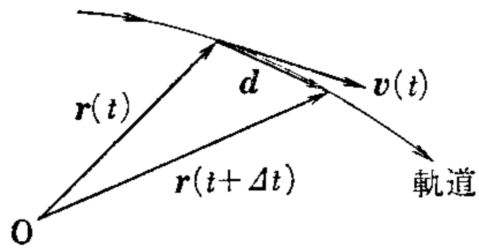

図 2.5: 軌道と速度。

であるので、

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{2.13}$$

である。速さは $v{=}|\vec{v}|{=}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ で与えられる。

2.3.2 速度と座標系

絶対静止座標系に対して、原点も座標軸方向も時間的に変化している座標系を考える (O'-$x'y'z'$ 系とする)。

この座標系での位置ベクトル $\vec{r'}(t)$ と座標は、その時間依存をあらわに書くと、

$$\vec{r'}(t) = x'(t)\vec{e}_{x'}(t) + y'(t)\vec{e}_{y'}(t) + z'(t)\vec{e}_{z'}(t) \tag{2.14}$$

である。時間微分を行い、速度ベクトル $\vec{v'}(t)$ を求めると、

$$\vec{v'}(t) = \frac{d\vec{r'}(t)}{dt} = \left[\frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_{z'}\right] + \left[x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right] \tag{2.15}$$

となる。

ここで右辺第 1 の [ ] は座標系 O'-$x'y'z'$ 系が静止していると思っている観測者の測定する速度を意味し、"座標系 O'-$x'y'z'$ 系から見た速度" と呼ぶ。式 (2.15) から分かるように、これは実際の O'-$x'y'z'$ 系での速度 $d\vec{r'}/dt$ とは異なる。この事は例えば、電車がカーブを曲がっているときには、電車の中の人の見る速度と、その人の速度 (=電車の速度) を加えても、プラットホームの人の見る速度にはならず、式 (2.15) の第 2 の [ ] のような余分な項を考慮しなければならない事を意味している。

式 (2.15) の第 2 の [ ] の物理的意味と表現は後程論じるが、ここでは O' は動かず座標軸が回っている場合についてより詳しく見ておく。簡単の為、x' 方向のみを考える (図 2.6 参照)。$t \sim t+\Delta t$ の変位は、

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'(t+\Delta t)\vec{e}_{x'}(t+\Delta t) - x'(t)\vec{e}_{x'}(t) \\ &= \{x'(t+\Delta t) - x'(t)\}\vec{e}_{x'} + x'(t+\Delta t)\{\vec{e}_{x'}(t+\Delta t) - \vec{e}_{x'}(t)\}\end{aligned} \tag{2.16}$$

で与えられる。$\Delta t \to 0$ の極限で、右辺の第 1 項と第 2 項は各々、式 (2.15) の第 1 及び第 2 の [ ] になる。

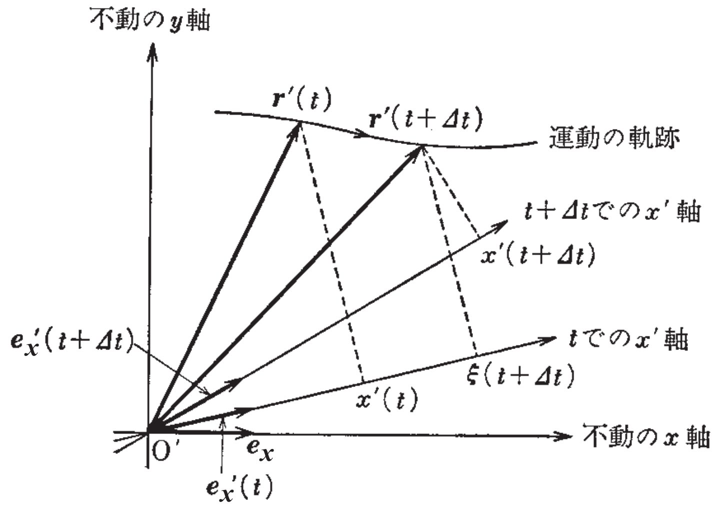

図 2.6: 回転する座標系から見た速度。

O'-$x'y'z'$ に乗っている人から見ると、x' 方向の変位は、

$$x'(t+\Delta t) - x'(t) \tag{2.17}$$

であり、この事から、式 (2.15) の第 1 の [ ] は座標系 O'-$x'y'z'$ 系が静止していると思っている観測者の測定する速度という意味を持つことが分かる。

しかし、実際の $\vec{e}_{x'}(t)$ 方向の変位は

$$\xi(t+\Delta t) - x'(t) \tag{2.18}$$

であり、式 (2.17) とは等しくない。この差を補うのが、式 (2.15) の第 2 の [ ] の $\vec{e}_{x'}$ 成分である。

2.4 運動の相対性

前節の議論から分かるように、速度は座標系に依存する。ではどの速度が本当の速度で、どの速度が見かけの速度であろうか?

本当の速度が定義出来る絶対静止座標系は考えられるであろうか? 地表は地球の中心のまわりに回転していて、その地球の中心も太陽のまわりに運動している。この議論はどこで終結するだろうか? 仮に終結したとして宇宙の中心はどこであろうか? 座標軸の向きはどう決めればよいか? 中心は静止しているのか動いているのか? 何に対して?

ニュートンは、“本当の速度” が定義出来る絶対静止座標系の存在を前堤としたが、その存在は実証出来なかった (存在しない)。例えば有名な天動説と地動説も、太陽と地球しか無ければどちらが正しいかは区別できない。

このように、絶対静止座標系は存在せず、運動は選んだ座標系に対する相対的な運動としてしか記述されない。これを**運動の相対性**という。

2.5 加速度

加速度は、速度の時間的変化率として定義される。速度の変位

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) \tag{2.19}$$

に対して、Δt を無限に小さくした時の、単位時間当たりの変位ベクトルとして定義され、

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{2.20}$$

で定義される、速度ベクトル $\vec{v}$ の 1 次微分 (位置ベクトル $\vec{r}$ の 2 次微分) で表される。

加速度も速度と同様に運動の相対性の問題があり、座標系に依存する。