3　力学の基本法則

3.1　慣性の法則 (第一法則)

外から何の作用 (力) も働かなければ、

静止している物体は静止しつづけ、運動している物体は等速度直線運動する

というのが、**ガリレオの慣性の法則**とか**ニュートンの第一法則**と呼ばれる力学の基本法則の一つである。

前節でみたように、速度は座標系を指定しなければ意味が無い。従って本法則は、

慣性の法則が成立する座標系の存在を主張

しているともいえる。この座標系のことを**慣性系**という。

すると、"慣性系はどこにあるのか?" という事が問題となるが、前述の通り絶対静止座標系は存在しない。しかしながら、妥当な近似下で慣性系とみなせる系は一般的に選ぶ事ができる。例えば、地面に固定した系で、投げたボールの運動を記述する場合などである。これが十分良い近似になっている (慣性系とみなせる) ことは講義の後半でみる。

3.2　座標変換

ある慣性系 (Σ 系) がある場合を考える。この系に対して、座標原点 O' が一定速度 $\vec{V}$ で動く系 (Σ' 系) を考える (図 3.1)。Σ' 系での位置ベクトル $\vec{r'}$ は、Σ 系での位置ベクトル $\vec{r}$ と O' の位置ベクトル $\vec{R}$ を用いて、

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R} \tag{3.1}$$

と表される。両辺の時間微分を行うと、$\vec{V} = d\vec{r}/dt$ に注意して、

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} \tag{3.2}$$

を得る。ここで、Σ 系は慣性系であるので、$d\vec{r}/dt$ は作用 (力) が働いていなければ一定である。$\vec{V}$ も一定であるので、結局 $d\vec{r'}/dt$ もまた一定である事が分かる。

したがって Σ' 系もまた慣性系であり、慣性系は 1 つではない事がわかる。

さて、式 (3.2) から、速度は慣性系による (一意的に決まらない) ため、絶対的な意味を持たない。これに対して加速度は、式 (3.2) を更に t で微分を行うと、$\vec{V}$=一定から、

$$\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3.3}$$

となり、**加速度は慣性系によらない**事が分かる。この性質が第 2 法則で重要な役割を果たす。

3.3　運動方程式 (第 2 法則)

運動の法則は、"どの慣性系で見ても同じ" として、速度の絶対的意味を否定したのが、**ガリレオの相対性原理**と呼ばれるものである。これは例えば、地上でも、一定速度の電車内でも、物体は自由落下するという事から実証される。

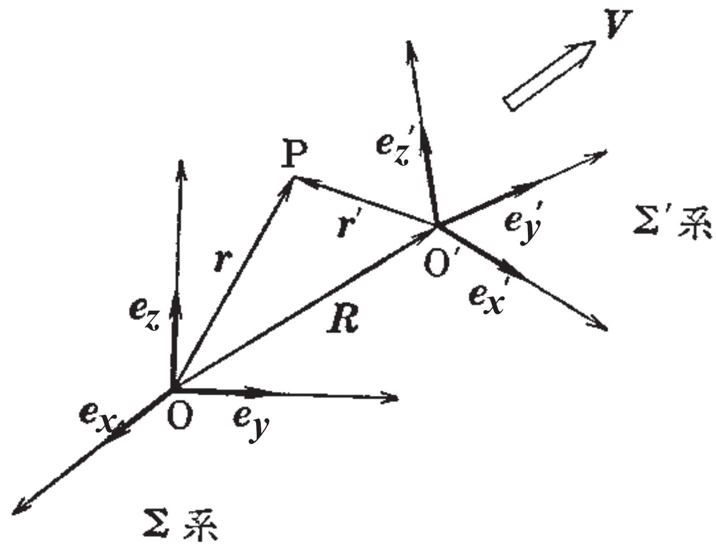

図 3.1: Σ' 系 Σ 系に対して、等速度 $\vec{V}$ で動いている。Σ 系が慣性系であれば、Σ' 系も慣性系である。

さて、慣性系によらない物理量は加速度であるので、運動法則は加速度を用いて書かれる事が期待される。ここでニュートンは、加速度と、経験的に感じている力という概念を結びつけて、

慣性系でみると、質点の加速度は加えられた力に比例する

とした。加速度がベクトルであるので、力もまたベクトルであり $\vec{F}$ とおく。比例係数を m または $1/m$ とすると、

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}, \quad m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{3.4}$$

と表される。ここで比例係数として現れる m が質点の**質量**である。

第 2 法則は、加速度を通して、力と質量を同時に定義している。質量の定まった物体 A(質量 m_A) があれば、$\vec{F}$ を加えて $\vec{a}$ を測定することにより、$\vec{F}$ を定義する (測定する) 事が出来る。また質量の定まっていない物体 B(質量 m_B) がある場合、A と B に同じ力 $\vec{F}$ を加えて、各々の加速度 $\vec{a}_A$ 及び $\vec{a}_B$ を測定する事により、

$$\vec{F} = m_A\vec{a}_A = m_B\vec{a}_B \quad \rightarrow \quad m_B = m_A\frac{|\vec{a}_A|}{|\vec{a}_B|} \tag{3.5}$$

として質量 m_B を求める事が出来る。従って、質量の基準が必要であり、現在は国際キログラム原器 (白金とイリジウムの合金) の質量が 1 キログラム (1 kg) と定義されている。

3.4 作用・反作用の法則 (第 3 法則)

2 つの質点 1 と質点 2 があり、質点 2 が質点 1 に作用する力を $\vec{F}_{12}$、質点 1 が質点 2 に作用する力を $\vec{F}_{21}$ とする。このとき、

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{3.6}$$

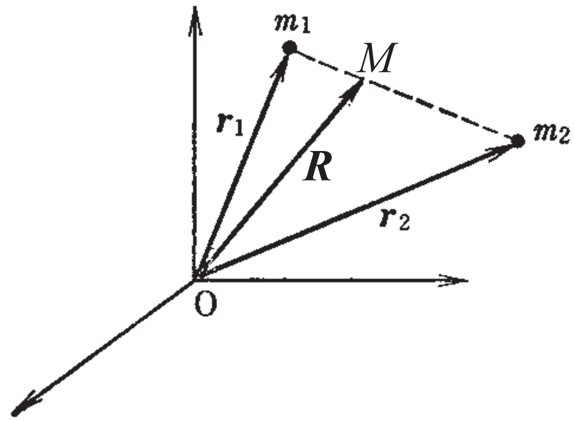

図 3.2: 2 質点系と重心の運動。

が成り立つ。この事を、作用・反作用の法則、または運動に関するニュートンの第 3 法則と呼び、質点系の問題で重要な役割を果たす。

ここでは簡単な例で、有限な大きさの物体を質点とみなす理想化に際して、この法則が本質的な役割を果たしている事を示す。

図 3.2 に示す、質点 1(質量 m_1、位置ベクトル $\vec{r}_1$) 及び質点 2(質量 m_2、位置ベクトル $\vec{r}_2$) を考える。作用する力が $\vec{F}_{12}$ と $\vec{F}_{21}$ のみのとき、各々の運動方程式は、

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}, \quad m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} \tag{3.7}$$

となる。辺々加えて、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \tag{3.8}$$

と書ける。ここで、M は**全質量**、$\vec{R}$ は**重心 (質量中心)** と呼ばれる。

2 質点が力 $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ で結合されているとき、その複合系が 1 質点とみなせるためには、外力が働いていないから、第 1 法則を満たす必要がある。作用・反作用の法則が成り立っていれば、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 \tag{3.9}$$

となるから、$d\vec{R}/dt$=一定であり、

　　複合系を質量 M、位置ベクトル $\vec{R}$ なる質点

とみなして第 1 法則と矛盾しない。逆に、作用・反作用の法則が成立しないと、複合系を “質量 M をもつ質点” とみなせない事がわかる。

計算・メモ用余白