4 運動方程式の解法

ここでは、基本的な例をもとに、問題解法の典型的な手法を学ぶと共に、以降のための数学的準備も併せて行う。特に解法の標準的手順が、

1. 物体に働く力を全て探し出す
2. 運動方程式を立てる
3. 一般解を求める
4. 初期条件から、題意に即した解を得る

と、4 段階で進められることを理解すること。

4.1 等加速度運動

図 4.1 に示すような、

> 質量 m のボールを、地上高さ h のところから、速さ v、水平面との角度 θ で上方に投げた時の運動

について考える。

I. モデル化する ボールを質点とみなし、その大きさや回転は無視する。この理想化は、後述のように、ボールの重心運動のみに着目する事に相当する。

II. 作用する力を全て探す 質点に働く力を考える。まず、地球が及ぼす**重力**が考えられる。重力は、質量 m に比例し、鉛直下向きに働く。比例係数は**重力加速度の大きさ**と呼ばれ一般に g で表される。

他に空気の抵抗力や浮力が考えられるが、ここでは無視する。この無視が妥当な近似であるかは、問題 (演習) で考える事とする。

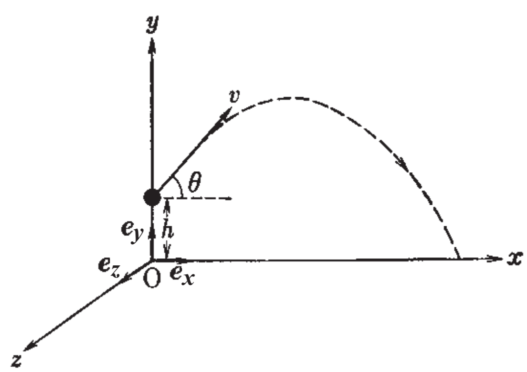

図 4.1: 放物運動。

III. 座標系を選ぶ 地面に固定した座標系をとる。自転や公転の影響は無視できるので、この座標系は慣性系とみなせる。

座標軸は、ボールの真下の地面を原点とし、鉛直上向きを y 軸、初速度が xy 平面の第 1 象限にくるように x 軸をる。

IV. 運動方程式を立てる 運動方程式は、

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

となる。ベクトル表示では簡単に、

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} \tag{4.2}$$

となる。ここで、$\vec{g}$ は**重力加速度ベクトル**とよばれ、上の座標系では、

$$\vec{g} = -g\vec{e}_y \tag{4.3}$$

である。

V. 運動方程式の一般解を求める 式 (4.1) を 1 回不定積分して、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_{0x} \\ \frac{dy}{dt} &= -gt + v_{0y} \\ \frac{dz}{dt} &= v_{0z} \end{aligned} \tag{4.4}$$

を得る。ここで、(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) は積分定数である。これが速度の一般解で 3 つの未知定数を含む。

ベクトル表示では、式 (4.2) を積分して、

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \tag{4.5}$$

を得る。ここで、$\vec{v}_0$ は、

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z \tag{4.6}$$

である。

式 (4.4) をさらに積分して、

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t + x_0 \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \\ z &= v_{0z}t + z_0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

を得る。ここで、(x_0, y_0, z_0) は新しい積分定数である。これが位置座標に関する一般解で、6 個の未知定数を含む。

ベクトル表示では、式 (4.5) を積分して、

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{4.8}$$

を得る。ここで、$\vec{r}_0$ は、

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z \tag{4.9}$$

である。

VI. 初期条件から積分定数を決める ボールを投げた時間を $t = 0$ とすると、問題設定 (初期条件) から、

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, h, 0), \quad (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (v\cos\theta, v\sin\theta, 0) \tag{4.10}$$

と求まる。ベクトル表示では、

$$\vec{v}_0 = v\cos\theta\vec{e}_x + v\sin\theta\vec{e}_y, \quad \vec{r}_0 = h\vec{e}_y \tag{4.11}$$

となる。

VII. 考察を進める 一般には、得られた解をもとに、考察を進め情報を引き出す。具体例は問題 (演習) に譲る。

4.2 数学的準備 I

以下では、次章以降で用いる数学の公式等について説明する。

4.2.1 テイラー展開

x の関数 $f(x)$ が、$x = x_0$ の近傍で、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \end{aligned} \tag{4.12}$$

と無限級数に展開できるとする。近傍とは、この無限級数が収束する範囲をいう。式 (4.12) を k 回 $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 微分して、$x = x_0$ での値を比較すると、以下の関係を得る。

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2!a_2, \cdots, f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \cdots \tag{4.13}$$

ここで、

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \cdots \tag{4.14}$$

である。式 (4.13) より、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned} \tag{4.15}$$

と表される (展開できる) 事が分かる。式 (4.15) を、$f(x)$ の $x = x_0$ での**テイラー展開**という。

4.2.2 マクローリン展開

$f(x)$ の $x=0$ でのテイラー展開は、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

となる。式 (4.16) を、$f(x)$ の**マクローリン展開**という。

三角関数に関して、$|\theta| \ll 1$ の場合、マクローリン展開から、

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &\approx \theta \\
\cos\theta &\approx 1
\end{aligned} \qquad (4.17)
$$

が分かる (証明は演習問題)。

4.2.3 複素数の指数関数

x が実数のとき、指数関数 e^x のマクローリン展開は

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

である。式 (4.18) を複素数 z に拡張して、複素数に対する指数関数を

$$
\begin{aligned}
e^z &= 1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

と無限級数で定義することにする。e^z は一般に複素数である。

e^z は次の指数関数の性質を満たす (証明は、式 (4.19) を用いる)。

1. $e^{(z_1+z_2)} = e^{z_1}e^{z_2}$
2. $\dfrac{de^{z(t)}}{dt} = \dfrac{dz(t)}{dt}e^{z(t)}$

ここで、z が純虚数 $i\theta(i^2=-1$、θ は実数) の場合を考えると、

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\theta)^n &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

が分かる。式 (4.20) を**オイラーの公式**という。

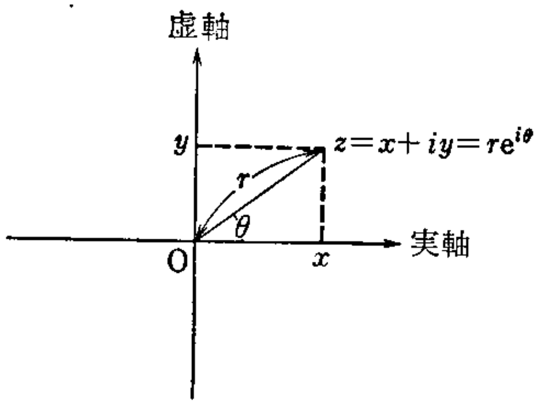

図 4.2: ガウス平面。

4.2.4 ガウス平面

複素数 $z = x + iy$ は図 4.2 のように横軸を実数部、縦軸を虚数部をとると、2 次元平面の 1 点として表される。この平面を**ガウス平面**と呼び、横軸は**実軸**、縦軸は**虚軸**と呼ぶ。ガウス平面上の点 $z = (x, y)$ を、2 次元極座標 (r, θ) で表すと、この複素数の絶対値は

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \tag{4.21}$$

であり、

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \tag{4.22}$$

であるから、

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{4.23}$$

と表される。θ を z の**偏角**(argument) と呼び、

$$\theta = \arg(z) \tag{4.24}$$

と書く。

4.3 古典的因果律

質点の運動の一般解には、既にみたように、2 つの未定の定ベクトル (3 次元の場合は 6 個の積分定数) が現れる。これは、運動方程式が時間に関して、**2 次微分までしか含んでいない**ことの反映である。この 2 つの定ベクトルは、ある時間での質点の位置と速度を知れば決定される。従って、質点にはたらく力を全ての時刻で知っていれば、ある時刻での位置と速度を知ることにより、質点の過去及び未来の任意の時刻の位置と速度を知る事ができる。これを**古典的因果律**という。

このことを、テイラー展開を用いて数学的に表現してみる。簡単のため、1 次元の運動 $x(t)$ を考える。時刻 $t = t_0$ で、位置 $x(t_0)$ と速度 $x'(t_0)$ が分かっているものとする。t_0 から微小時間 Δt だけ経過したときの、位置と速度は、テイラー展開から、

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}x''(t_0)\Delta t^2 + \cdots \\ x'(t_0 + \Delta t) &= x'(t_0) + x''(t_0)\Delta t + \cdots \end{aligned} \tag{4.25}$$

と表される。運動方程式

$$mx''(t) = F(t) \tag{4.26}$$

で $F(t)$ を知っているので、$x''(t_0)$ は分かる。従って、$x(t_0)$ 及び $x'(t_0)$ を知り、Δt を十分小さくとれば、望む精度で、$x(t_0 + \Delta t)$ と $x'(t_0 + \Delta t)$ を求める事ができる。この操作を順次続けることにより、任意の時刻での位置と速度が求まる。ここで大切なのは、運動方程式が 2 次微分までしか含まないということである。もし 3 次微分を含むなら、$t = t_0$ での加速度までも知らなくてはならない事になる (各自、確認せよ)。