5 基本的例題

5.1 抵抗のある場合の落下運動

前章で考えた自由落下に対して、空気の抵抗を考慮する。抵抗力の大きさは速度に比例するとし、ボールは高さ h のところから初速 0 で落されたとする。

> 空気の抵抗は、速度が小さいときは速度に比例し、速度が大きくなると速度の 2 乗に比例することが実験的に知られている。

座標原点を最初のボールの位置にとり、鉛直下向きを x の正の向きにとる。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - m\gamma\frac{dx}{dt} \tag{5.1}$$

となる。右辺第 2 項が速度に比例する抵抗力を表し、比例係数は質量 m をくくりだし $m\gamma$ と書いた。**負号は抵抗力が常に速度と逆向きであることを表す**。y, z 方向の運動は自明であるので考慮しない。

式 (5.1) を

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} && (5.2) \\ \frac{dv}{dt} &= g - \gamma v && (5.3) \end{aligned}$$

と 2 つの式に分けて書く。

式 (5.3) を

$$(v \text{ に関する式})dv = (t \text{ に関する式})dt \tag{5.4}$$

と変型する。**微分記号も分数のように演算する。正当性は数学の教科書に譲る**。結果、

$$\frac{dv}{v - g/\gamma} = -\gamma dt \tag{5.5}$$

を得る。両辺を積分して、

$$\ln\left|v - \frac{g}{\gamma}\right| = -\gamma t + \alpha \tag{5.6}$$

となる (α は積分定数) が、これから速度に関する一般解

$$v = \frac{g}{\gamma} + Ae^{-\gamma t} \tag{5.7}$$

を得る ($A = \pm e^{\alpha}$ は積分定数)。式 (5.7) を式 (5.2) に代入して積分すると、位置座標に関する一般解

$$x = \frac{g}{\gamma}t - \frac{A}{\gamma}e^{-\gamma t} + B \tag{5.8}$$

を得る (B は積分定数)。

初期条件、$t = 0$ で $v = 0$ かつ $x = 0$ を一般解に代入すると、

$$\frac{g}{\gamma} + A = 0, \quad -\frac{A}{\gamma} + B = 0 \tag{5.9}$$

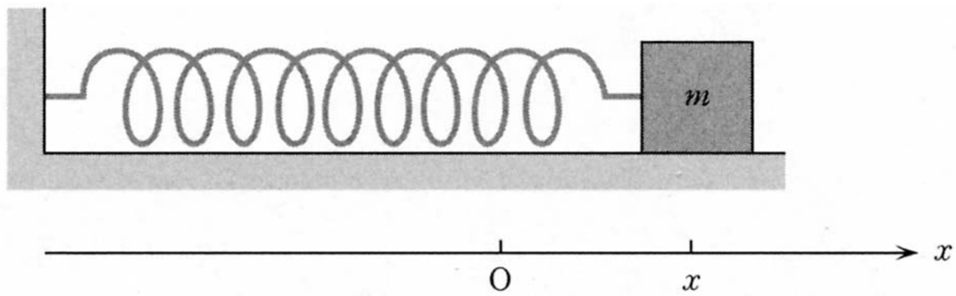

図 5.1: 単振動の例。

から A および B が決まり、求める解は

$$v = \frac{g}{\gamma}[1 - e^{-\gamma t}], \quad x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}[e^{-\gamma t} - 1] \tag{5.10}$$

となる。これらの解が、運動方程式及び初期条件を満たす事は容易に確認できる。各人確認せよ。

十分時間が経つ ($t \to \infty$) と、$e^{-\gamma t} \to 0$ であるから、速度は指数関数的に一定の値、

$$v_t = \frac{g}{\gamma} \tag{5.11}$$

に近づく。この速度 v_t を**終端速度 (terminal velocity)** という。

終端速度については、時間が経つと速度がほぼ一定、すなわち加速度が 0 ということから、運動方程式で $d^2x/dt^2 = 0$ とおくことにより直ちに求まる。

有名なミリカンの油滴の実験は、油滴の落下速度が急速に終端速度に達することを利用している。

5.2 単振動

図 5.1 のように、水平で滑らかな台の上に、一端を固定したばねがある。その他端に質量 m の物体を結び、ばねを長さ x_0 だけ伸ばして、静かに離した時の運動を考える。

物体は質点とみなし、ばねの質量は無視する。ばねが自然長にあるときの物体の位置を原点とし、ばねを伸ばした方向を x の正の向きにとる。ばねが物体に及ぼす力は、ばねの伸び x に比例する (ばねの**復元力**)。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.12}$$

となる。$k(> 0)$ は**ばね定数**と呼ばれる比例定数である。右辺の負号は、復元力が常にばねの伸びと逆向きであることを表している。

式 (5.12) を、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.13}$$

と書き直す。式 (5.13) は**単振動の運動方程式**と呼ばれる。一般に対象が何であれ、その運動が式 (5.13) に従うとき、その運動を**単振動**という。単振動は広範囲な自然現象に現れ、物理学で最も基本的な運動の 1 つである。

ここでは、物体の y, z 方向の運動は自明であるとしている。例えば鉛直上向きを y の正の向きとすると、y 方向には重力 mg と台が物体を支える力 (**垂直抗力**)R が働き、運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = R - mg$$

となる。質点は y 方向には動かないから $d^2y/dt^2 = 0$。したがって、

$$R = mg$$

である。一般に運動できる範囲を制限するように自動的に調整されて定まる力を**拘束力**といい、ここでの R も拘束力である。

　さて、我々は式 (5.13) を解かなければならないわけだが、前節の方法は使えない (運動方程式を v と t のみを含む式に変形出来ず、必ず x が入る)。ここでは応用度の高い、複素数の指数関数を用いる方法を採る。

　試しに

$$x = e^{\alpha t} \tag{5.14}$$

とおく (α は定数)。式 (5.13) に代入すると

$$(\alpha^2 + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0 \tag{5.15}$$

であるから、

$$\alpha = \pm i\omega_0 \tag{5.16}$$

ととれば、$e^{\alpha t}$ は方程式 (5.13) の解である。2 つの解

$$x_1 = e^{i\omega_0 t}, \quad x_2 = e^{-i\omega_0 t} \tag{5.17}$$

は独立な解である (一方が他方の定数倍ではない)。さらに、A, B を任意の複素数として、2 つの解の 1 次結合

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \tag{5.18}$$

も解である (式 (5.13) に代入すれば直ちにわかる)。

　ここまでは単に数学的に解いたので、x は一般に複素数である。本問題の場合、x は実数であるから、A, B は勝手に選べず

$$B = A^* \tag{5.19}$$

でなければならない (A^* は A の複素共役)。すなわち

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + A^*e^{-i\omega_0 t} \tag{5.20}$$

が運動方程式 (5.13) の実数解である ($e^{i\omega_0 t}$ と $e^{-i\omega_o t}$ が互いに複素共役であることに注意)。

　複素定数 A は、実部と虚部という 2 つの任意実数定数を含む。ある時刻での位置と速度を与えれば、2 つの任意定数が定まり問題が完全に解ける。この一般解は、

$$\begin{aligned} x &= Ae^{i\omega_0 t} + A^*e^{-i\omega_0 t} && (5.21) \\ &= C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) && (5.22) \\ &= a\cos(\omega_0 t + \phi) && (5.23) \\ &= a\sin(\omega_0 t + \psi) && (5.24) \end{aligned}$$

などといろいろな形に表すことができる。ここで、A は複素数、その他の変数は実数である。問題に応じて、適当な形を選べばよい。

a を振幅、ω_0 を角振動数と呼ぶ。周期 T と振動数 ν は、

$$\omega_0 T = 2\pi \to T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{5.25}$$

である。$\omega_0 t + \phi$(または $\omega_0 t + \psi$) を**位相**という。

さて、問題の場合、初期条件は $t = 0$ で $x = x_0$ かつ $dx/dt = 0$ であるから、式 (5.22) より

$$C = x_0, \quad \omega_0 D = 0 \tag{5.26}$$

よって、解は

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \tag{5.27}$$

である。

5.3 減衰振動

前節の振動系で、速度に比例する抵抗力がはたらく場合を考える (微小角の単振り子で、空気の抵抗がはたらく場合など)。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt} \quad (k, \gamma > 0) \tag{5.28}$$

で与えられるが、整理して、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{5.29}$$

と書き直す。この方程式を**減衰振動の方程式**という。

前節同様

$$x = e^{\alpha t} \tag{5.30}$$

とおいて、式 (5.29) に代入すると、

$$(\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0 \tag{5.31}$$

となるから、α に関する 2 次方程式の解

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{5.32}$$

をとれば、$e^{\alpha t}$ は式 (5.29) の解である。

ここで、式 (5.32) の平方根中の符号に応じて、3 つの場合に分けて考える。

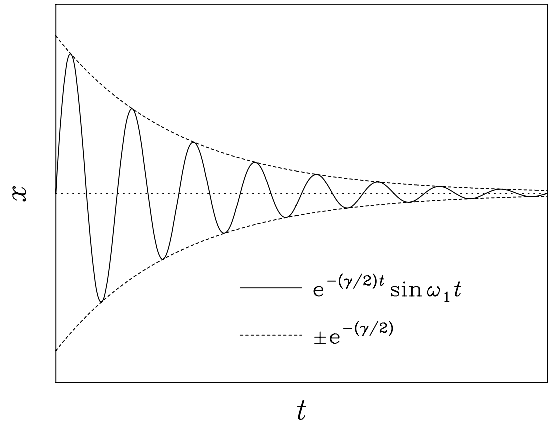

図 5.2: 減衰振動の例。

5.3.1 $\omega_0 > \gamma/2$ の場合

式 (5.32) の平方根中は負である。

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{5.33}$$

とおくと、α の 2 根は

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_1, \quad \alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - i\omega_1 \tag{5.34}$$

で与えられる。一般解は、2 つの独立な解 $e^{\alpha_1 t}$、$e^{\alpha_2 t}$ の 1 次結合で、かつ実数であるという条件から、

$$x = e^{-(\gamma/2)t}[Ae^{i\omega_1 t} + A^* e^{-i\omega_1 t}] \tag{5.35}$$

$$= ae^{-(\gamma/2)t} \sin(\omega_1 t + \phi) \tag{5.36}$$

で与えられる。

式 (5.36) は、角振動数が ω_1 で、振幅が $ae^{-(\gamma/2)t}$ と時間と共に減衰する単振動で、これを**減衰振動**という。グラフに示すと図 5.2 のようになる。

5.3.2 $\omega_0 < \gamma/2$ の場合

式 (5.32) の平方根中は正である。α の 2 根は異なる実数であり

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}, \tag{5.37}$$

で与えられる。一般解は、C と D を 2 つの任意の実数定数として、

$$x = Ce^{\alpha_1 t} + De^{\alpha_2 t} \tag{5.38}$$

と表される。

$$\alpha_2 < \alpha_1 < 0 \tag{5.39}$$

であるから、$e^{\alpha_1 t}$ と $e^{\alpha_2 t}$ はともに単調減少関数である。この場合を**過減衰**といい、抵抗力が強く振動が生じない。$t = 0$ で $x = x_0$ かつ $dx/dt = 0$ の場合の x の変化の様子を図 5.3 に示す。

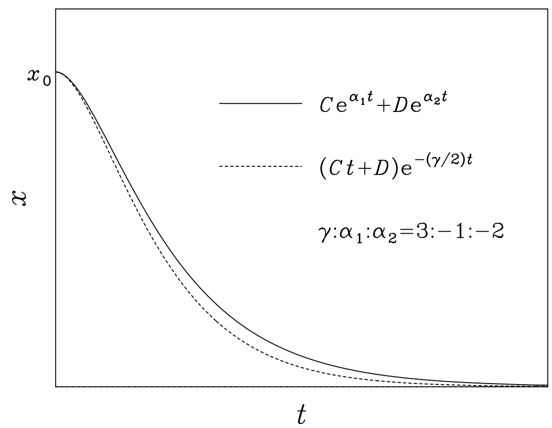

図 5.3: 過減衰 (実線) と臨界減衰振動 (破線) の例。初期条件は等しくしてある。

5.3.3 $\omega_0 = \gamma/2$ の場合

式 (5.32) の平方根中は 0 である。α の 2 根は等根

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} = -\omega_0 \tag{5.40}$$

となるので、$x = e^{\alpha t}$ とおく方法では 1 つの解しか求まらず、一般解を得る事はできない。

次の方策として、得られた 1 つの解 (**特解**) $x = e^{-(\gamma/2)t}$ を用いて、

$$x = f(t)e^{-(\gamma/2)t} \tag{5.41}$$

とおく。

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{df}{dt} - \frac{\gamma}{2}f\right)e^{-(\gamma/2)t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2f}{dt^2} - \gamma\frac{df}{dt} + \frac{\gamma^2}{4}f\right)e^{-(\gamma/2)t} \tag{5.42}$$

を、式 (5.29) に代入して、式 (5.40) に注意すると、$f(t)$ に関する方程式

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 0 \tag{5.43}$$

を得る。$f(t)$ の一般解は、C と D を 2 つの任意定数として、

$$f(t) = Ct + D \tag{5.44}$$

で与えられるから、方程式 (5.29) の一般解として、

$$x = (Ct + D)e^{-(\gamma/2)t} \tag{5.45}$$

を得る。この場合はぎりぎり振動の生じない場合で、**臨界減衰振動**という。$t = 0$ で $x = x_0$ かつ $dx/dt = 0$ の場合の x の変化の様子を図 5.3 に破線で示す。