6　強制振動

6.1　数学的準備 II

6.1.1　斉次線形微分方程式

単振動や減衰振動の方程式の一般化として、n 階の微分方程式

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \tag{6.1}$$

を考える。左辺を簡単に表すため、

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n \tag{6.2}$$

なる記号を導入し、式 (6.1) の左辺は、L を x に作用させるという意味で、$L(x)$ と書くことにする。L のようにある演算を表す記号を**演算子**という。

式 (6.2) で定義した演算子 L は、t の 2 つの関数 x と y に対して、

$$L(x+y) = L(x) + L(y) \tag{6.3}$$

を満たし、かつ、α を定数として、

$$L(\alpha x) = \alpha L(x) \tag{6.4}$$

を満たす。一般に、条件 (6.3) と (6.4) を同時に満足する演算子を**線形演算子**という。

> 線形でない演算子としては、例えば 2 乗するという演算子
>
> $$S(x) = x^2 \tag{6.5}$$
>
> が挙げられる。これは、
>
> $$S(x+y) = x^2 + y^2 + 2xy = S(x) + S(y) + 2xy \tag{6.6}$$
>
> であるので、線形演算子ではない。

さて、微分方程式 (6.1) は

$$L(x) = 0 \tag{6.7}$$

と書ける。このように、L が線形演算子で右辺がゼロであるとき、この方程式は**斉次線形微分方程式**と呼ばれ、次の重要な性質を持つ。

定理 x_1、x_2 が斉次線形微分方程式 $L(x) = 0$ の解であるならば、λ_1、λ_2 を任意の定数として

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \tag{6.8}$$

も解である。

証明 式 (6.3) と式 (6.4) を遂次用いると、

$$L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = L(\lambda_1 x_1) + L(\lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2) \tag{6.9}$$

となる。x_1、x_2 は解であるから、$L(x_1) = L(x_2) = 0$。したがって、$L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = 0$ である ($\mathcal{Q.E.D.}$)。

前章では、$x = e^{\alpha t}$ とおいて、2 つの解 x_1、x_2 を求め、上記の定理を用いて一般解 (2 つの未知定数を含む) を求めた。n 階の斉次線形微分方程式の場合、n 個の積分定数を持つので、まず n 個の 1 次独立な解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求め、n 個の未知定数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を導入して、1 次結合

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{6.10}$$

をつくれば、これが一般解である。

一般には方程式 (6.1) の係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は t の関数である。とくに定数であるとき、n 個の独立な解を求める方法として、$x = e^{\alpha t}$ とおくのは、1 つの強力な処方である。**但し、既に見た通り、万能ではない**。

6.1.2 非斉次線形微分方程式

$f(t)$ を t の関数とするとき、微分方程式

$$L(x) = f(t) \tag{6.11}$$

を**非斉次線形微分方程式**という (右辺が恒等的には 0 ではない)。

この方程式を解くには、まず何らかの方法で 1 つの解 (**特解**)$x = x_0(t)$ をみつける。次に、式 (6.11) に対応する斉次方程式 $L(x) = 0$ の一般解 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ を求める。このとき、方程式 (6.11) の一般解は

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{6.12}$$

であることが証明される。なぜなら、

$$L(x) = L(x_0) + L(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i), \quad L(x_0) = f(t), \quad L(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = 0 \tag{6.13}$$

より、x は解であり、かつ n 個の未知定数を含むから一般解である。

6.2 強制振動

前章でみた減衰振動の状況設定で、さらに、時間的に変化する外力 $F(t)$ を作用させた場合を考える。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt} + F(t) \quad (k, \gamma > 0) \tag{6.14}$$

で与えられるが、整理して、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F(t)}{m},\qquad \omega_0^2=\frac{k}{m} \tag{6.15}$$

と書き直す。この方程式を**強制振動の方程式**という。この方程式は前節で説明した、**非斉次線形微分方程式**の 1 つである。

ここで問題を簡単化して、力 $F(t)$ が

$$F(t)=F_0\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.16}$$

と三角関数で表される周期的な力の場合を考える。

6.2.1　抵抗力の無い場合

さらに簡単化して、まずは抵抗力の無い場合 ($\gamma=0$) を考える。解くべき運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.17}$$

となる。

I. 特解を探す　まずは特解を探す。力が $\cos(\omega t+\Delta)$ と変化するから、質点の運動もそれに従って、$\cos(\omega t+\Delta)$ に比例すると予想して

$$x=A\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.18}$$

とおいてみる。これを、式 (6.17) に代入すると

$$(-A\omega^2+A\omega_0^2)\cos(\omega t+\Delta)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.19}$$

であるから、

$$A=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{F_0}{m} \tag{6.20}$$

ととれば、

$$x_0=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.21}$$

が 1 つの特解となる。

II. 斉次方程式の一般解を求める　方程式 (6.17) に対応する斉次方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \tag{6.22}$$

と単振動の場合の方程式になる。その一般解は

$$x=C\cos(\omega_0t)+D\sin(\omega_0t) \tag{6.23}$$

で与えられる。

III. 非斉次方程式の一般解を求める　特解と斉次方程式の一般解を加えたものが、非斉次方程式 (6.17) の一般解であるので、

$$x = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \Delta) + C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) \tag{6.24}$$

で与えられる。

IV. 初期条件から未知定数を決める　ここで、$t = 0$ で $x = 0$ かつ $dx/dt = 0$ という初期条件で問題を解く。$t = 0$ で、

$$\begin{aligned} (x)_{t=0} &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{F_0}{m}\cos\Delta + C = 0 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} &= -\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{F_0}{m}\sin\Delta + \omega_0 D = 0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

であるから、これらから C と D を定めて、解は、

$$x = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{F_0}{m}\left[\cos(\omega t + \Delta) - \cos\Delta\cos\omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0}\sin\Delta\sin\omega_0 t\right] \tag{6.26}$$

と求まる。

V. $\omega = \omega_0$ の場合　前述の解法は、$\omega = \omega_0$ の場合は分母が 0 になり問題がある。そこで、$\omega \neq \omega_0$ の場合の解である式 (6.26) の $\omega \to \omega_0$ の極限を考えると、$\cos(\omega_0 t + \Delta) = \cos\Delta\cos\omega_0 t - \sin\Delta\sin\omega_0 t$ に注意して、

$$\begin{aligned} x &= \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{F_0}{m}\left[\cos(\omega t + \Delta) - \cos(\omega_0 t + \Delta) + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\sin\Delta\sin\omega_0 t\right] \\ &= \lim_{\omega t\to\omega_0 t}\frac{-t}{\omega_0 + \omega}\frac{F_0}{m}\frac{\cos(\omega t + \Delta) - \cos(\omega_0 t + \Delta)}{\omega t - \omega_0 t} - \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{1}{\omega_0 + \omega}\frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0}\sin\Delta\sin\omega_0 t \\ &= \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin(\omega_0 t + \Delta) - \frac{F_0\sin\Delta}{2m\omega_0^2}\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{6.27}$$

を得る。これをもとの方程式 (6.17) に代入して、$\omega = \omega_0$ とおくと確かに解になっていることが確かめられる。

図 6.1 に、$\Delta = 0$ の場合の解の様子を示す。振幅が時間に比例して大きくなっている (外力の振幅は一定であることに注意)。このように、外から加える作用の (角) 振動数 ω が、系固有の振動数 ω_0 と等しくなり、振幅が限りなく大きくなる現象を**共鳴 (共振)** という。

さて、式 (6.27) の右辺第 2 項は斉次方程式の解であることに注意すると、第 1 項のみでも $\omega = \omega_0$ のときの特解になっていることがわかる。したがって、$\omega = \omega_0$ の場合の一般解は

$$x = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin(\omega_0 t + \Delta) + C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t \tag{6.28}$$

と書ける。

小指 1 本で釣鐘をゆすってみせたという逸話は、共鳴の原理に通じている。

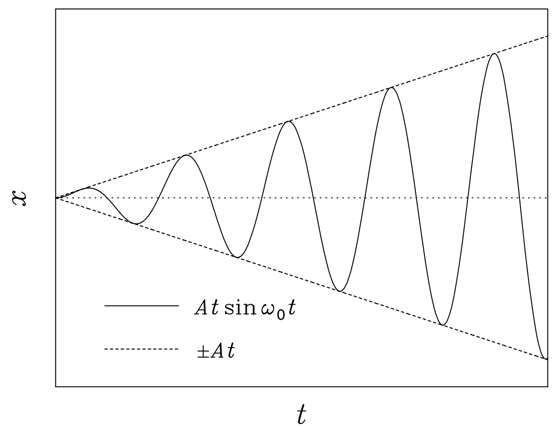

図 6.1: 共鳴 (共振) の例。

6.2.2 抵抗力のある場合

解くべき運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.29}$$

である。抵抗が無い場合と同様に、変位が外力に比例すると予想し $x=A\cos(\omega t+\Delta)$ とおいて式 (6.29) に代入すると、

$$(-\omega^2+\omega_0^2)A\cos(\omega t+\Delta)-\omega\gamma A\sin(\omega t+\Delta)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\Delta) \tag{6.30}$$

となり、cos と sin が混ざって現れ、時間によらない定数 A が求まらない。残念ながら、**変位は外力に比例しない**のである。

これに対する解法はいくつか知られているが、ここでは複素数の指数表示を用いる方法を採る。x に関する微分方程式 (6.29) を複素数 z に関する方程式に拡張する。具体的には

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\frac{dz}{dt}+\omega_0^2 z=Ke^{i\omega t},\quad K\equiv\frac{F_0}{m}e^{i\Delta} \tag{6.31}$$

と書ける。式 (6.29) は式 (6.31) の実部で与えられる。

式 (6.31) の右辺の複素数的な外力の時間依存性 $e^{i\omega t}$ に対応して、複素数的変位 z を

$$z=Ae^{i\omega t} \tag{6.32}$$

とおいて、式 (6.31) に代入すると

$$(-\omega^2+i\gamma\omega+\omega_0^2)Ae^{i\omega t}=Ke^{i\omega t} \tag{6.33}$$

から

$$A=\frac{K}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega} \tag{6.34}$$

と、時間によらない複素定数 A が求まる。すなわち、方程式 (6.31) の特解として

$$z_0=\frac{K}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega}e^{i\omega t}=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}e^{i(\omega t+\Delta)} \tag{6.35}$$

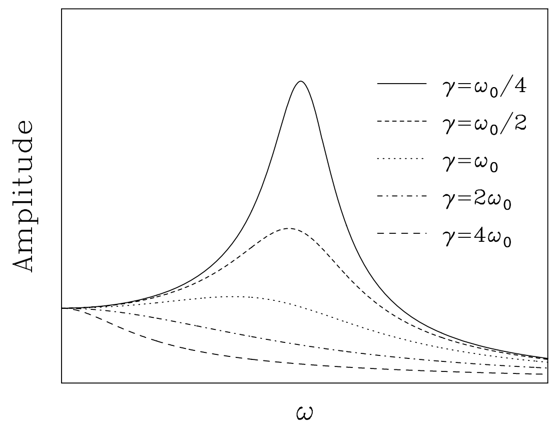

図 6.2: 定常的な項の振幅の ω 依存性。

が得られる。

我々が求めたい式 (6.29) の解は、z の実部であるので、方程式 (6.29) の特解として、

$$\begin{aligned} x_0 &= \Re\left[\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}e^{i(\omega t+\Delta)}\right] \\ &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t+\Delta)+\gamma\omega\sin(\omega t+\Delta)] \\ &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\Delta+\delta) \end{aligned} \tag{6.36}$$

を得る。ここで、

$$\tan\delta = \frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \tag{6.37}$$

である。

方程式 (6.29) に対応する斉次方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x = 0 \tag{6.38}$$

と減衰振動の方程式になり、その一般解は前章で求めた。$\omega_0 > \gamma/2$ の場合、方程式 (6.29) の一般解は

$$x = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\Delta+\delta)+e^{-(\gamma/2)t}(C\cos\omega_1 t+D\sin\omega_1 t) \tag{6.39}$$

で与えられる。ここで、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2-(\gamma/2)^2}$ である。

解 (6.39) で、積分定数 C と D を含む第 2 項は、$e^{-(\gamma/2)t}$ という時間とともに減衰する因子を含むので、十分時間が経つ ($t \gg 2/\gamma$) と無視でき、第 1 項すなわち特解 x_0 のみが残る。そこで第 1 項を**定常的な項**、第 2 項を**過渡的な項**と呼ぶ。抵抗力がある場合、定常的な項は外力に比例せず、位相が δ だけずれた振動をする。

定常的な項の振幅の ω 依存性は図 6.2 のようになり、これを**共鳴曲線**という。抵抗力があると振幅が無限大に発散することはないが、γ が ω_0 に比べて十分小さいと $\omega \approx \omega_0$ で非常に大きくなる。これが通常の**共鳴 (共振) 現象**である。

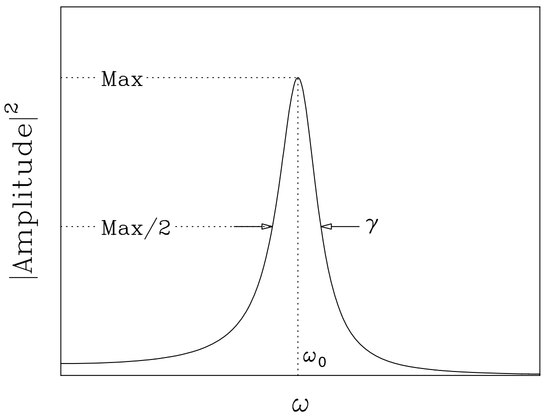

図 6.3: 共鳴曲線の例。$\gamma = \omega_0/5$ の場合を示した。

実際の自然現象では、振幅そのものではなく、振幅の 2 乗が重要なことも多い。例えば、耳は空気の振動の振幅の 2 乗を音の強さとして認識する。定常的な項の振幅の 2 乗の ω 依存性は

$$(\text{振幅})^2 \propto \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{6.40}$$

で与えられる。図 6.3 は $\omega_0 \gg \gamma$ の場合であり、これも共鳴曲線と呼ばれる。$\omega \approx \omega_0$ で極大となり $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$ で (振幅)^2 は極大値の半分になるので、ω_0 を共鳴角振動数、γ を半値幅という。

計算・メモ用余白