7　運動量と角運動量

この章では運動量と角運動量の保存則について、次章ではエネルギーの保存則について論ずる。これら保存則は質点系の運動を論ずる場合に有力であるので、きちんと理解して欲しい。

7.1　質量中心と運動量

7.1.1　質量中心

N 個の質点からなる質点系を考える。i 番目の質点の質量を m_i、位置ベクトルを $\vec{r}_i$ とおくと運動方程式は、

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{7.1}$$

と書ける。ここで、$\vec{F}_i$ は i 番目の質点に質点系外から働く力で、**外力**と呼ばれる。これに対して、$\vec{f}_{ij}$ は i 番目の質点に j 番目の質点が及ぼす力で、質点系内の質点間の力なので**内力**という。

一般に、内力の総和 $\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$ は全ての質点の位置によるから、式 (7.1) は $3N$ 次元の連立 2 階微分方程式となる。N が少しでも大きくなると、最新のスーパーコンピューターを用いても、この連立方程式を解くことは困難である[1]。しかしこのような複雑な場合も、この質点系の運動に対して、いくつかの性質は簡単に知ることができる。

式 (7.1) の両辺を全ての質点について和をとると、

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} \tag{7.2}$$

となる。ここで、右辺第 2 項の内力の和には、必ず $\vec{f}_{ij}$ と $\vec{f}_{ji}$ が 1 度ずつ現れる。作用・反作用の法則から

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) = 0 \tag{7.3}$$

であるので、右辺第 2 項は 0 になり、

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{7.4}$$

を得る。

そこで、**全質量**M と**全外力**$\vec{F}$ をそれぞれ

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{7.5}$$

と書き、位置ベクトル

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \tag{7.6}$$

[1] 例えば、1 モルの気体分子を考えると、$3 \times 6 \times 10^{23}$ 次元の連立方程式を解く事になる。

で与えられる点を**質量中心**(**重心**) と呼ぶ。このとき、式 (7.4) は**重心の運動方程式**

$$M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = \vec{F} \tag{7.7}$$

を与える。これは質量中心に全質量が集中していて、そこに全外力が集中している 1 質点の運動方程式に等しい。

質点系の運動において、重心の運動を知るだけでも大変貴重である。たとえば、打ち上げ花火が空中で爆発して破片が飛び散る際、破片がどの範囲に落ちるか (どの範囲を立ち入り禁止にすべきか) といった事が議論できる。これについては問題で検討してもらう。

7.1.2 運動量

運動量 $\vec{p}$ は、質点の質量 m と速度 $\vec{v}$ の積

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{7.8}$$

で定義されるベクトル量である。運動量を用いると運動方程式は

$$\frac{d\vec{p}}{d\vec{t}} = \vec{F} \tag{7.9}$$

と書ける。両辺を t_1 から t_2 まで積分すると

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{7.10}$$

となる。右辺

$$I(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{7.11}$$

を、時刻 t_1 から t_2 の間に働いた力 $\vec{F}$ の**力積**という。式 (7.10) は

運動量の変化は、その間に働いた力積に等しい

ことを意味している。

バットでボールを打つときに働くような瞬間的な力を**撃力**という。力が瞬間的であるので、運動の詳細を時々刻々追うことは出来ない ($\vec{F}$ の時間依存性の詳細を知らない為)。しかし、力積のような積分量は衝突の前後の運動量の変化として測定しうる量である。したがって撃力などに対しては、運動方程式を式 (7.10) の形で用いると便利な場合が多い。

さて、質点系では、各質点のもつ運動量の総和

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i \tag{7.12}$$

を**全運動量**と呼ぶ。式 (7.6) を時間で微分して、式 (7.12) と比較すると

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = M\frac{d\vec{r}_G}{dt} \tag{7.13}$$

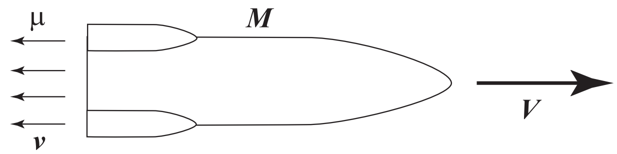

図 7.1: ロケットの運動。

を得る。ここで $\vec{v}_G = d\vec{r}_G/dt$ は**重心の速度**であり、重心運動の方程式は

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{7.14}$$

と表される。

質点系に働く外力の総和が 0(見かけ上、外力が働かない) の場合、

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \tag{7.15}$$

であるので、

$\vec{P}$ は時間によらず一定

を得る。特に、外力が全く働かない系を**孤立系**とよび、法則

孤立系の運動量は保存する (時間によらず一定)

が成り立つ。これを**運動量保存則**という。たとえば、宇宙全体の運動量は宇宙開闢以来一定である。

ロケットの運動　運動量保存の例題として、無重力中でのロケットの運動を考える。時刻 $t=0$ で質量 M、速度 0 のロケットが、単位時間当り質量 μ の燃料をロケットから見て速さ v で噴射して推進するときの、時刻 t でのロケットの速度 $V(t)$ を求める (図 7.1 参照)。

外力が働かないので、運動量は保存する。時刻 t でのロケットと、$t+\Delta t$ でのロケットと燃料に対する運動量保存則は

$$(M-\mu t)V(t) = [M-\mu(t+\Delta t)]V(t+\Delta t) + \mu\Delta t(V(t)-v) \tag{7.16}$$

で与えられる。ここで $(V(t)-v)$ は燃料の、慣性系 (ロケットの速度を記述している系) での速度である。式 (7.16) を整理して、

$$(M-\mu t)(V(t+\Delta t)-V(t)) = \mu\Delta t(v+V(t+\Delta t)-V(t)) \tag{7.17}$$

となる。両辺を Δt で割って、$\Delta t \to 0$ とすると、方程式

$$(M-\mu t)\frac{dV}{dt} = \mu v \tag{7.18}$$

を得る。式 (7.18) の一般解は

$$\frac{dV}{dt} = -v\frac{1}{t-M/\mu} \tag{7.19}$$

より、

$$V(t) = -v \log|t - M/\mu| + C \quad (C\text{ は積分定数}) \tag{7.20}$$

である。初期条件から $C = v \log M/\mu$ であるので、$V(t)$ は、

$$V(t) = v \log \frac{M}{M - \mu t} \tag{7.21}$$

と求められる。

各人、$V(t)$ と t の関数としてグラフに描いて、ロケットの加速の様子を理解せよ。

7.1.3 実験室系と重心系

ビリヤードで、静止している球に別の球をぶつけた際の運動を論じる場合、我々は一般にビリヤード台が静止している座標系 (=標的の球が静止している座標系) で考える。このような座標系を**実験室系**(**標的静止系**) と呼ぶ。この座標系は通常慣性系と考えられるが、このような衝突問題を考える際には、必ずしも最良の慣性系ではない (**慣性系は 1 つではないことに注意せよ**)。

実験室系でみて、質量 m_1 の質点 1 が速度 $\vec{v}_1$ で飛んできて、静止している質量 m_2 の質点 2 に衝突し、衝突後、質量 m_3、速度 $\vec{v}_3$ と、質量 m_4、速度 $\vec{v}_4$ の 2 つの質点3、4 となって飛び去った場合を考える (図 7.2 左参照)。全質量 M は衝突の前後で保存するものとし、

$$M = m_1 + m_2 = m_3 + m_4 \tag{7.22}$$

とする。この 2 質点において、衝突の際働くのは内力のみであるから、全運動量 $\vec{P}$ は衝突の前後で等しく、

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2 \times 0 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 \\ &= M\vec{v}_G\end{aligned} \tag{7.23}$$

である。ここで、$\vec{p}_i$ は質点 i の運動量である。したがって、重心の速度 $\vec{v}_G$ は

$$\vec{v}_G = \frac{m_1}{M}\vec{v}_1 \tag{7.24}$$

となる。

ここで、重心に座標原点をとり、重心と共に実験室系に対して一定速度 $\vec{v}_G$ で動いている座標系を考える (図 7.2 右参照)。この座標系を**重心系**という。$\vec{v}_G$ は一定であるので、重心系も慣性系である。重心系での物理量にダッシュ($'$) をつけて実験室系での物理量と区別する。位置ベクトル $\vec{r}\,'$ および速度ベクトル $\vec{v}\,'$ には

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_G \quad \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_G \tag{7.25}$$

の関係がある。ここで、重心の実験室系での位置ベクトル $\vec{r}_G$ は

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M} \tag{7.26}$$

である。

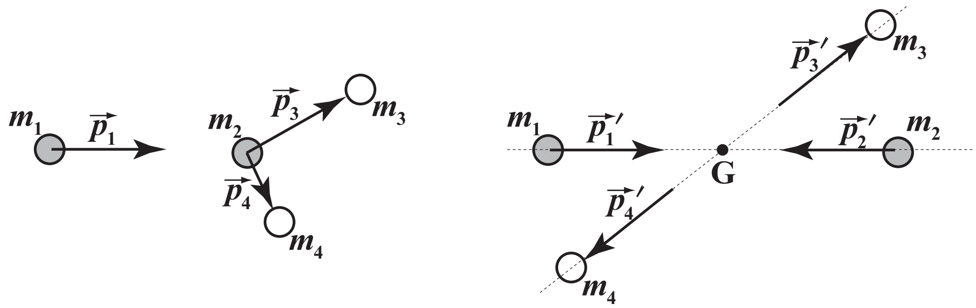

図 7.2: 実験室系 (左) と重心系 (右)。

重心系での運動量は、式 (7.24)–(7.26) から

$$\begin{aligned} \vec{p}_1' &= m_1\vec{v}_1' = m_1\left(\vec{v}_1 - \frac{m_1}{M}\vec{v}_1\right) = \frac{m_1m_2}{M}\vec{v}_1 = \mu\vec{v}_1 \\ \vec{p}_2' &= m_2\vec{v}_2' = m_2\left(\vec{v}_2 - \frac{m_1}{M}\vec{v}_1\right) = -\frac{m_1m_2}{M}\vec{v}_1 = -\mu\vec{v}_1 \end{aligned} \tag{7.27}$$

となる。ここで、

$$\mu = \frac{m_1m_2}{M} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{7.28}$$

を 2 質点 1,2 系の換算質量という。式 (7.27) より、重心系での全運動量は

$$\vec{P}\,' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0 \tag{7.29}$$

となる。このことは、重心系で重心が静止していることからも直ちにわかる。運動量保存則は任意の慣性系で成立するから、重心系でも

$$\vec{P}\,' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_3' + \vec{p}_4' = 0 \tag{7.30}$$

が成り立つ。したがって、

$$\vec{p}_3' = -\vec{p}_4' \tag{7.31}$$

となって、重心系で考えると容易である (見通しがよい) 問題は多い。

実験室系での結果が必要な場合は、式 (7.26) を用いて重心系での物理量から実験室系での物理量を求めればよい。

7.2 ベクトルの内積と外積

7.2.1 内積

内積は、2 つのベクトル量から 1 つのスカラー量をつくる演算である。2 つのベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$ のなす角を θ として、

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \tag{7.32}$$

で定義される。成分表示では、$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ 等とすると、

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{7.33}$$

である。
内積は以下の交換則と分配則を満足する。

交換則 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$
分配則 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

7.2.2 外積

外積は、2 つのベクトル量から 1 つのベクトル量をつくる演算である。2 つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ 外積を $\vec{A}\times\vec{B}$ と書く。2 つのベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$ のなす角を θ として、外積の大きさは、

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \tag{7.34}$$

で定義される。向きは、$\vec{A}$ と $\vec{B}$ のつくる面に垂直で、$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{A}\times\vec{B}$ が右手系をなす向きである。成分表示では、

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x=A_yB_z-A_zB_y \quad (\vec{A}\times\vec{B})_y=A_zB_x-A_xB_z \quad (\vec{A}\times\vec{B})_z=A_xB_y-A_yB_x \tag{7.35}$$

である。
外積は以下の交換則と分配則を満足する。

交換則 $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$
分配則 $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

7.3 角運動量

7.3.1 角運動量と力のモーメント

空間のある点 P に 1 つのベクトル $\vec{A}$ が与えられたとき、ある特定の点 O を定め、“点 O のまわりのベクトル $\vec{A}$ の**モーメント**” を、

$$(\vec{r}_P-\vec{r}_O)\times\vec{A} \tag{7.36}$$

で定義する。ここで、$\vec{r}_P$、$\vec{r}_O$ はそれぞれ点 P、O の位置ベクトルである。特に、位置ベクトル $\vec{r}$ の点にいる質点の運動量 $\vec{p}$ のモーメント

$$\vec{l}=(\vec{r}-\vec{r}_O)\times\vec{p} \tag{7.37}$$

を、この質点の点 O のまわりの**角運動量**という。またこの質点に力 $\vec{F}$ が働くとき

$$\vec{N}=(\vec{r}-\vec{r}_O)\times\vec{N} \tag{7.38}$$

を、点 O のまわりの**力のモーメント**という。
以下では表現を簡単にするために、点 O を座標原点とする。したがって、“点 O のまわり” は “原点のまわり” の意味となる。さらに簡単のために、この形容詞句も省略する。しかし、モーメントを考えるときは、**どの点のまわり**かということは大切な要件なので忘れないこと。

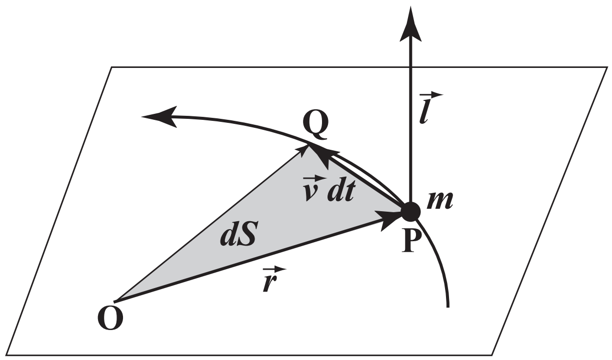

図 7.3: 角運動量。

1 質点の運動を考えると、角運動量の時間的変化は、

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)+\vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N} \qquad \left(\because \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=0\right) \qquad (7.39)\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{N} \tag{7.40}$$

を得る。特に、$\vec{F}$ と $\vec{r}$ が平行なら、$\vec{N}=0$ となり、角運動量 $\vec{l}$ は時間的に変化しない (保存する) ことがわかる。

7.3.2　角運動量と力のモーメントの直感的意味

図 7.3 に示すような運動を考える。質点は微小時間 dt に、点 P から点 Q まで $\vec{v}dt$ だけ移動する。点 O のまわりに質点の描いた面積、すなわち△ OPQ の面積 dS は

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}dt| \tag{7.41}$$

である (外積の定義から、外積の部分は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の作る平行四辺形の面積であることに注意すれば直にわかる)。したがって、角運動量の大きさは、

$$|\vec{l}| = m|\vec{r}\times\vec{v}| = 2m\frac{dS}{dt} \tag{7.42}$$

となる。dS/dt は、質点が点 O のまわりに単位時間に描く面積 (**面積速度**) である。したがって、角運動量は質点の点 O のまわりの回転の度合いを与える。また、外積の定義より、$\vec{l}\perp\vec{r}$ かつ $\vec{l}\perp\vec{v}$ であるので、各瞬間、質点はその時刻の角運動量に垂直な平面内を運動している。$\vec{l}$ の向きは、この平面内で、点 O を中心として質点のまわっている方向を表している (質点の運動方向に右ねじをまわすと、$\vec{l}$ の方向にねじが進む)。

つぎに、図 7.4 のように質点に力 $\vec{F}$ が働くと、力のモーメント $\vec{F}$ は図のように $\vec{r}$ と $\vec{F}$ に垂直な方向を向いている。力 $\vec{F}$ は、質点を $\vec{N}$ に垂直な平面内で点 O のまわりにまわそうとするので、角

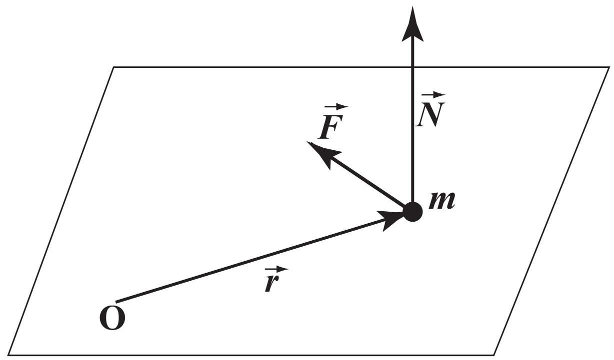

図 7.4: 力のモーメント。

運動量が変化する。このように、角運動量の変化を生じさせる力の能力を表すのが力のモーメントで、式 (7.40) の意味である。

てこの原理で良く知られた

(腕の長さ)×(力の大きさ)

が、まさに力のモーメントの大きさを表している。ここで、(腕の長さ) は $r\sin\theta$ である。

7.3.3 質点系の角運動量

N 個の質点からなる質点系を考える。系の**全角運動量**$\vec{L}$ は、

$$\vec{L}=\sum_i \vec{l}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i \tag{7.43}$$

と表される。$\vec{L}$ の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{v}_i+\vec{r}_i\times\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad \left(\because \frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{v}_i=\vec{v}_i\times\vec{v}_i=0\right)\\ &= \sum_i r_i\times(\text{質点 } i \text{ に働く力})=\sum_i r_i\times(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})\end{aligned} \tag{7.44}$$

となる。内力の部分に着目すると、作用・反作用の法則より、

$$\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}=\sum_i\sum_{j>i}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij} \quad (\because \vec{f}_{ji}=-\vec{f}_{ij}) \tag{7.45}$$

となる。

2 質点 i、j 間に働く力が、その質点間を結ぶ方向に働くとき、このような力を**中心力**という。いま、内力が中心力であるとすると、$\vec{f}_{ij}\,/\!/\,(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$ であるから、式 (7.45) で内力のモーメントの和は 0 となって、

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\,, \qquad \vec{N}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i \tag{7.46}$$

を得る。ここで、$\vec{N}$ は外力のモーメントの総和である。特に孤立系 ($\vec{F}_i = 0$) では、$\vec{N} = 0$ であるから、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \tag{7.47}$$

となる。すなわち、法則

孤立系では、内力が中心力なら系の全角運動量は保存する

を得る。これを**角運動量保存則**という。

7.3.4 重心運動の分離

ここまでは、空間に固定された座標系 (実験室系) で角運動量を議論してきた。ここでは、この角運動量が "座標原点のまわりに重心のもつ角運動量" と "重心のまわりに各質点のもつ角運動量" の和に分解されることを示す。

重心の位置ベクトルを $\vec{r}_G$、重心を基準点とする質点 i の位置ベクトルを $\vec{r}_i'$ とすると、

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_G \tag{7.48}$$

である。ここで

$$\sum_i m_i\vec{r}_i' = \sum_i m_i\vec{r}_i - \sum_i m_i\vec{r}_G = 0 \quad \left(\because \vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) \tag{7.49}$$

であるから、$\vec{r}_i$ は全ては 1 次独立ではない。ここで、全角運動量 $\vec{L}$ を $\vec{r}_i'$ と $\vec{r}_G$ で表すと、

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i m_i(\vec{r}_i' + \vec{r}_G) \times \frac{d(\vec{r}_i' + \vec{r}_G)}{dt} \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \vec{r}_G \times \left(\sum_i m_i\right)\frac{d\vec{r}_G}{dt} + \sum_i m_i\vec{r}_i' \times \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \vec{r}_G \times \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i' \end{aligned} \tag{7.50}$$

となるが、第 3 及び 4 項は式 (7.49) から 0 である。従って、

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_G + \vec{L}' \\ \vec{L}_G &= \vec{r}_G \times M\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \vec{r}_G \times \vec{P} \\ \vec{L}' &= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\frac{d\vec{r}_i'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' \end{aligned} \tag{7.51}$$

とまとめられる。ここで、$\vec{L}_G$ は座標原点のまわりの**重心の角運動量**であり、$\vec{L}'$ は系の**重心のまわりの角運動量**である。$\vec{L}'$ はまた**内部角運動量**とも呼ばれる。

外力のモーメントも同様に、

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{N}_G + \vec{N}' \\ \vec{N}_G &= \vec{r}_G \times \vec{F} = \vec{r}_G \times \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{N}' &= \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \end{aligned} \tag{7.52}$$

と分解できる。$\vec{N}_G$ は重心に全外力が作用したとみなしたときの座標原点のまわりの全外力のモーメントであり、$\vec{N}'$ は重心のまわりの外力のモーメントの総和である。

さて、式 (7.51) で $\vec{L}_G$ の式を時間で微分すると、

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M\left(\frac{d\vec{r}_G}{dt}\times\frac{d\vec{r}_G}{dt}\right) + \vec{r}_G \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}_G \times \vec{F} = \vec{N}_G \quad \left(\because \frac{d\vec{r}_G}{dt}\times\frac{d\vec{r}_G}{dt} = 0\right) \tag{7.53}$$

であるので、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{N}_G \quad \text{および} \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{N}' \tag{7.54}$$

と分解される。特に孤立系では、

$$\vec{L}_G = \text{一定} \quad \text{かつ} \quad \vec{L}' = \text{一定}$$

となり、重心の持つ角運動量と内部角運動量という 2 つの保存量を得ることができる。

7.3.5 例題:ケプラーの面積速度一定の法則

太陽のまわりの地球の運動を考える。地球を質量 m_1、位置ベクトル r_1 の質点 1 とし、太陽を質量 m_2、位置ベクトル r_2 の質点 2 とする。両者の間には万有引力

$$\vec{f}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\vec{f}_{21} \tag{7.55}$$

のみが働き、他の天体の影響はないとする。定数 G は**万有引力定数**と呼ばれ、G=6.67×10^{-11} $\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ である。$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ は太陽から地球に向かう単位ベクトルである。したがって、$\vec{f}_{12}$ は中心力であり、この 2 質点は内力が中心力で外力が働かないから、内部角運動量が保存し、

$$\vec{L}' = \text{一定} \tag{7.56}$$

が成り立つ。

ここで、太陽に対する地球の**相対位置ベクトル**

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{7.57}$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} \vec{r}_1{}' &= \vec{r}_1 - \vec{r}_G = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2{}' &= \vec{r}_2 - \vec{r}_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{aligned} \tag{7.58}$$

であるので、内部角運動量 $\vec{L}'$ は

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \vec{r}_1{}' \times m_1\frac{d\vec{r}_1{}'}{dt} + \vec{r}_2{}' \times m_2\frac{d\vec{r}_2{}'}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{r} \times \mu\frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned} \tag{7.59}$$

と書ける。ここで、μ は換算質量である。

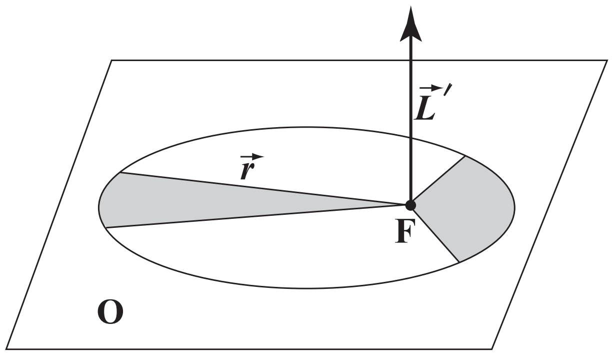

図 7.5: 面積速度一定の法則。

2 質点系では、

$$\vec{p} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{7.60}$$

を**相対運動の運動量**、

$$\vec{L}' = \vec{r} \times \vec{p} \tag{7.61}$$

を**相対運動の角運動量**という。

地球の公転の面積速度は、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{\mu}{2}|\vec{L}'| \tag{7.62}$$

であるから、内部角運動量保存則は、面積速度が一定であることを表している。これが**ケプラーの惑星運動の面積速度一定の法則**である。$\vec{L}'$=一定は、単に地球の描く面積が一定であるのみならず、地球と太陽が常に定ベクトル $\vec{L}'$ に垂直な平面内で**平面運動**することを主張している (図 7.5 参照)。

計算・メモ用余白