8　エネルギー

数学的準備の後に、エネルギーについて論ずる。エネルギーについては、1 質点の場合と質点系の場合を分けて論ずる。

8.1　数学的準備 III

8.1.1　偏微分

一般の多変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において、1 つの変数 x_i を除く他の全てを固定し、x_i について f を微分したもの

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_i + \Delta x_i, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\Delta x_i} \tag{8.1}$$

を、f の x_i に関する**偏微分**と呼び、左辺のような記号で表す。ここで、∂ は "ラウンド・ディー"、"ラウンド・デルタ"、"デル"、"ラウンド"、"パーシャル" などいろいろな呼び方をする。

8.2　1 質点の場合

8.2.1　仕事と運動エネルギー

1 質点に対する運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{8.2}$$

の両辺と速度 $d\vec{r}/dt$ の内積

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{8.3}$$

をとり、さらに

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right] = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{8.4}$$

と変形する。両辺を時刻 t_A から t_B まで積分すると、

$$T(t_B) - T(t_A) = W(t_B, t_A)\,, \quad T(t) \equiv \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)^2\,, \quad W(t, t_0) \equiv \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t') \cdot \frac{d\vec{r}(t')}{dt'}dt' \tag{8.5}$$

となる。ここで、$T(t)$ を時刻 t での**運動エネルギー**、$W(t, t_0)$ を時刻 t_0 から時刻 t までの間に力 $\vec{F}$ がした**仕事**という。また、各時刻における単位時間当りの仕事

$$\frac{dW(t, t_0)}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{8.6}$$

を**仕事率**という。式 (8.5) から、仕事 $W(t_B, t_A)$ は

$$\left(\text{無限小時間}\ dt\ \text{間の微小変位}\frac{d\vec{r}}{dt}dt\ \text{の大きさ}\right) \times \left(\text{その時刻に働いた力}\vec{F}(t)\ \text{の変位方向の成分}\right) \tag{8.7}$$

を、時刻 t_A から t_B の間について足し合わせたものに等しい。

式 (8.5) は、**運動エネルギーの増分は、その間に質点になされた仕事に等しい**ことを意味し、広義のエネルギー保存則を主張している。

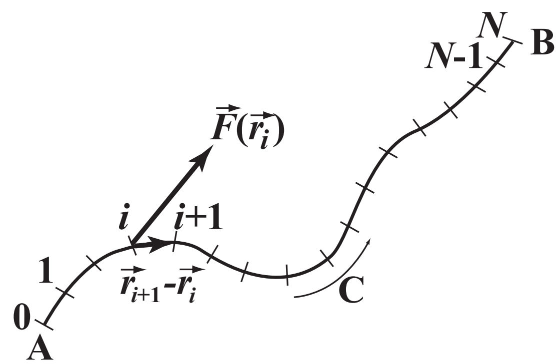

図 8.1: 線積分。

8.2.2 保存力、位置エネルギー

質点に働く力が位置だけの関数で、時間にはよらない場合を考える。このとき、力は

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{8.8}$$

と空間の各点 $\vec{r}$ の関数として与えられる。空間の各点に力 $\vec{F}$ が与えられているという意味で、この力全体を**力の場**と呼ぶ。この場合の用に、空間の各点にベクトルが与えられているとき、そのベクトル全体を**ベクトル場**という。また、空間の各点にスカラー量が与えられているときは**スカラー場**という。

力の場 $\vec{F}(\vec{r})$ が与えられた空間内で、質点を点 A から点 B まで、ある道筋 C に沿って動かしたとする。そこで、道筋を図 8.1 のように N 等分して、

$$W(\mathrm{C}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) \tag{8.9}$$

で定義される量を考える。ここで、$\vec{r}_i$ は i 番目の点の位置ベクトル、$\vec{r}_0 = \vec{r}_A$ は始点 A の位置ベクトル、$\vec{r}_N = \vec{r}_B$ は終点 N の位置ベクトルである。この量を、ベクトル場 $\vec{F}(\vec{r})$ の曲線 C に沿った**線積分**と呼び、

$$W(\mathrm{C}) = \int_{\mathrm{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{8.10}$$

と書く。この線積分は、時刻 t_A に A 点を出発して、時刻 t_B に B 点に到達したとすると、仕事 $W(t_B, t_A)$ に等しい。したがって、$W(\mathrm{C})$ は質点が曲線 C に沿って動いたとき、力の場 $\vec{F}(\vec{r})$ がした仕事といえる。

線積分 $W(\mathrm{C})$ が、始点 A と終点 B の位置だけで決まり、途中の経路 C によらないとき、この力を**保存力**という。このとき、線積分 $W(\mathrm{C})$ は始点 A と終点 B のみを指定して、

$$W(t_B, t_A) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{8.11}$$

と書かれる。

例えば、図 8.2 にように水平面上の質量 m の物体を斜面上の高さ h の P 点に引き上げる場合を考える。引きあげる道筋はいろいろ考えられるが、そのとき要する仕事は常に mgh で道筋によらない。したがって、重力は保存力である。

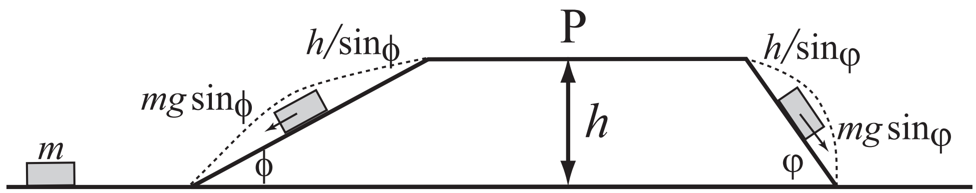

図 8.2: 物体を斜面上の P 点に持ち上げるいろいろな道筋と仕事。

保存力の場 (**保存力場**)$\vec{F}(\vec{r})$ が与えられたとき、ある基準点 $\mathrm{P_S}$ を定めると、空間の点 P(その位置ベクトル $\vec{r}$) の関数として、

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{\mathrm{P_S}}^{\mathrm{P}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8.12}$$

が定義できる[1]。この $V(\vec{r})$ を質点が $\vec{r}$ にいるときの質点のもつ**位置エネルギー**(または**ポテンシャル・エネルギー**) と呼ぶ。

ここまでは保存力場 $\vec{F}(\vec{r})$ から位置エネルギー $V(\vec{r})$ を線積分により導入したが、ここからは、逆に位置エネルギーの微分操作から力が求まることを示す。正規直交座標系で考えると、位置エネルギーは 3 変数 (x,y,z) の関数 $V(x,y,z)$ として表される。x 方向に Δx だけ離れた 2 点 A と B を考えると ($\vec{r}_B - \vec{r}_A = \Delta x\vec{e}_x$)、点 B と点 A での位置エネルギーの差は

$$V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z) = -\int_{\mathrm{P_S}}^{\mathrm{B}}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \left(-\int_{\mathrm{P_S}}^{\mathrm{A}}\vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8.13}$$

となる。線積分を x 軸に平行な直線上で行うと

$$V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z) = -\int_{x}^{x+\Delta x} F_x(x',y,z)dx' \tag{8.14}$$

となる。$\Delta x \to 0$ の極限を考えると、

$$-\int_{x}^{x+\Delta x} F_x(x',y,z)dx' \to -F_x(x,y,z)\Delta x \quad (\Delta x \to 0) \tag{8.15}$$

であるので、

$$F_x = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{8.16}$$

となる。y、z 方向についても同様に、

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{8.17}$$

と、位置エネルギーの偏微分で与えられる。これは、スカラー場 $V(\vec{r})$ から、ベクトル場 $\vec{F}(\vec{r})$ を導く微分演算である。ベクトル $(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z)$ を $\mathrm{grad}\,V$ (または $\vec{\nabla}V$) とか書く。すなわち、

$$\mathrm{grad}\,V(\vec{r}) = \vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \tag{8.18}$$

である。

[1]積分が経路による場合は、点 P だけの関数にならないことに注意。

以上から、保存力場 $\vec{F}(\vec{r})$ は、

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\, V(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{8.19}$$

と表される。$V(\vec{r})$ は力を導き出す潜在能力を表す量であるという意味で、**ポテンシャル**とも呼ばれる。

例 1：重力ポテンシャル　重力 $\vec{F}$ は、鉛直上向きを z 軸の正方向にとると、

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z \tag{8.20}$$

である。原点を、ポテンシャルの基準点 $\mathrm{P_S}$ にとると

$$V = -\int_0^{\mathrm{P}} (-mg\vec{e}_z \cdot d\vec{r}) = mg\vec{r} \cdot \vec{e}_z = mgz \tag{8.21}$$

となる。これを、**重力ポテンシャル**、または重力の位置エネルギーという。

例 2：単振動の位置エネルギー　1 次元の単振動では、変位を x とすると力は

$$F = -kx \tag{8.22}$$

である。$x = 0$ をポテンシャルの基準点にとると、位置エネルギーは

$$V = -\int_0^{x} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 \tag{8.23}$$

となる。

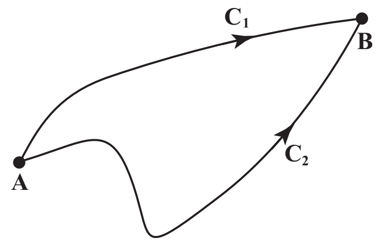

図 8.3: 点 A から B に向かう 2 つの経路 C_1 と C_2。

8.2.3 保存力の必要十分条件

図 8.3 のように、点 A から B に向かう任意の 2 つの経路を C_1、C_2 とする。$\vec{F}$ が保存力ならば、

$$\int_{\mathrm{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8.24}$$

である。B から A に C_2 を逆にたどる経路を $\bar{\mathrm{C}}_2$ とすると、線積分の定義から明らかに、

$$\int_{\bar{\mathrm{C}}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\mathrm{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8.25}$$

である。

A から経路 C_1 で B に行き、B から経路 $\bar{\mathrm{C}}_2$ で A に戻る経路を $\mathrm{C}_1+\bar{\mathrm{C}}_2$ と書くことにする。すると、

$$\int_{\mathrm{C}_1+\bar{\mathrm{C}}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\bar{\mathrm{C}}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (\because (8.24) \text{ および } (8.25)) \tag{8.26}$$

を得る。任意の A、B に対する任意の経路 C_1、C_2 を考える時、式 (8.26) は任意の閉経路に対しての $\vec{F}$ の線積分が 0 を主張しており、

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{8.27}$$

と書かれる。∘ 印はある閉経路に沿って積分することを意味している。式 (8.27) が力 $\vec{F}$ が保存力であるための必要十分条件である。

8.2.4 力学的エネルギー保存則

質点が保存力場を運動しているとする。位置エネルギー $V(\vec{r}(t))$ の時間変化は、

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{8.28}$$

であるから、保存力が質点にする仕事と位置エネルギーの間には、

$$W(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} F(\vec{t'})\cdot\frac{d\vec{r}(t')}{dt'}dt' = \int_{t_0}^{t}\left(-\frac{dV}{dt'}\right)dt' = V(t_0) - V(t) \tag{8.29}$$

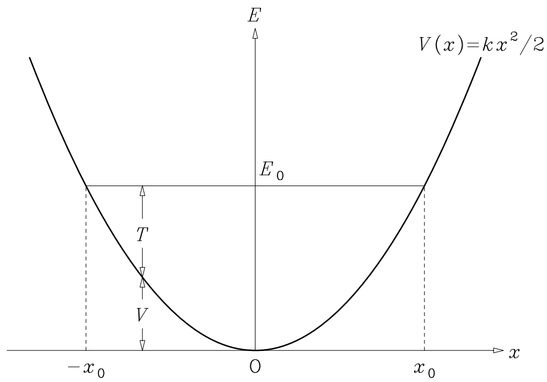

図 8.4: 単振動の場合の、全エネルギー E_0 の位置エネルギー V と運動エネルギー T への分配と運動可能領域。

の関係がある。従って、

$$W(t_B, t_A) = T(t_B) - T(t_A) = V(t_A) - V(t_B) \tag{8.30}$$

であるが、移行して

$$T(t_A) + V(t_A) = T(t_B) + V(t_B) \tag{8.31}$$

を得る。これは、**力が保存力なら、運動エネルギーと位置エネルギーの和**

$$E = T + V \tag{8.32}$$

は時間によらず一定である (保存する) ことを意味している。これを、**力学的エネルギー保存則**といい、E を質点のもつ**全力学的エネルギー**という。

例：単振動　単振動の全力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega_0^2 x^2\right] \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{8.33}$$

と書ける。

図 8.4 のように、横軸に変位、縦軸にエネルギーをとる。位置エネルギー $V = kx^2/2$ を描くと、全力学的エネルギー $E = E_0$ が与えられたとき (図中横線)、位置エネルギー V と運動エネルギー T の分配の様子が直ちにわかる。また、運動エネルギーは常に 0 か正であるので、運動は $-x_0 \leq x \leq x_0 (kx_0^2/2 = E_0)$ の範囲に限られる。したがって、x_0 が振幅であることは直ちにわかる。

8.3 質点系の場合

8.3.1 運動エネルギーと仕事

質点系の運動方程式、

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{8.34}$$

の両辺と速度 $d\vec{r}_i/dt$ の内積をとり、全質点の和をとると

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} \tag{8.35}$$

を得る。ここで、作用・反作用の法則を用いて書き直すと、

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2\right] = \sum_i \vec{F}_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_i\sum_{j>i}\vec{f}_{ij}\cdot\frac{d\vec{r}_{ij}}{dt} \tag{8.36}$$

となる。ここで、

$$\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j \tag{8.37}$$

は、質点 i の質点 j に対する相対ベクトルである。左辺の [ ] 内は、質点 i の運動エネルギー

$$T_i \equiv \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 \tag{8.38}$$

の全質点についての総和で、質点系の**全運動エネルギー**

$$T \equiv \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 \tag{8.39}$$

である。

式 (8.36) の両辺を時刻 t_A から t_B まで積分して、

$$T(t_B) - T(t_A) = \sum_i W_i(t_B, t_A) + \sum_i\sum_{j>i} W_{ij}(t_B, t_A) \tag{8.40}$$

$$W_i(t_B, t_A) \equiv \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}dt \tag{8.41}$$

$$W_{ij}(t_B, t_A) \equiv \int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_{ij}\cdot\frac{d\vec{r}_{ij}}{dt}dt \tag{8.42}$$

となる。$W_i(t_B, t_A)$ は質点 i に外力 $\vec{F}_i$ がした仕事で、式 (8.40) の左辺第 1 項は、質点系に**外力のした全仕事**を表す。他方、$W_{ij}(t_B, t_A)$ は質点 i と質点 j の間に働く**内力のした仕事**である ($W_{ij} = W_{ji}$ に注意)。

8.3.2 内力のポテンシャル

内力 $\vec{f}_{ij}$ が相対位置ベクトル $\vec{r}_{ij}$ のみの関数の場合を考える。相対位置ベクトルの変化 $\vec{r}_{ij}{}^A \to \vec{r}_{ij}{}^B$ に対して、その変化の経路 C に沿った線積分、

$$\int_{\mathrm{C}} \vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij} \tag{8.43}$$

が、経路 C によらないとき、内力 f_{ij} を**保存力**という。

そこで、相対位置ベクトル $\vec{r}_{ij}$ の関数 $\vec{v}_{ij}$ を、基準相対位置 $\vec{r}_{ij}{}^{\mathrm{S}}$ から $\vec{r}_{ij}$ までの任意の経路の線積分

$$v_{ij}(\vec{r}_{ij}) \equiv -\int_{\vec{r}_{ij}{}^{\mathrm{S}}}^{\vec{r}_{ij}} \vec{f}_{ij}(\vec{r}_{ij}{}') \cdot d\vec{r}_{ij}{}' \tag{8.44}$$

で定義する。1 質点系の場合と同様に、

$$\vec{f}_{ij} = -\mathrm{grad}_{\vec{r}_{ij}} v_{ij}(\vec{r}_{ij}) \tag{8.45}$$

である。ここで、$\mathrm{grad}_{\vec{r}_{ij}}$ は、$\vec{r}_{ij}$ について $\mathrm{grad}(\vec{\nabla})$ をとるという意味である。式 (8.45) の意味で、v_{ij} を**内力のポテンシャル**という。

さて、相対位置ベクトル $\vec{r}_{ij}$ を成分表示すると、

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad z_{ij} = z_i - z_j \tag{8.46}$$

である。$\mathrm{grad}_{\vec{r}_{ij}}$ は

$$\mathrm{grad}_{\vec{r}_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_{ij}}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_{ij}}\vec{e}_z \tag{8.47}$$

を意味している。v_{ij} を、$(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ の関数とみて、x_i で偏微分すると、

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_{ij}}\frac{\partial x_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial y_{ij}}\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial z_{ij}}\frac{\partial z_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_{ij}} \quad (\because \text{式 } (8.46)) \tag{8.48}$$

となる。y_i、z_i で偏微分した場合も同様であるので、

$$\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} v_{ij} = \mathrm{grad}_{\vec{r}_{ij}} v_{ij} = -\vec{f}_{ij} \tag{8.49}$$

を得る。したがって、質点 i に働く力を求めるには、内力、外力を問わず一般にポテンシャルの $\vec{r}_i$ についての $-\mathrm{grad}$ をとればよい。そこで、**内力の全ポテンシャル**を

$$v(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N) = \sum_i \sum_{j>i} v_{ij} \tag{8.50}$$

で定義すると、質点 i に働く内力は、

$$\sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = -\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} v(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N) \tag{8.51}$$

となり、1 質点の場合と同じ形になる。

8.3.3 中心力のポテンシャル

ここで力が中心力の場合のポテンシャルを求める。力は、

$$\vec{f}_{ij} = f(r_{ij})\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| \tag{8.52}$$

と書ける。ポテンシャルは

$$v_{ij} = -\int_{\vec{r}_{ij}{}^{\mathrm{S}}}^{\vec{r}_{ij}} f(r_{ij}{}') \frac{\vec{r}_{ij}{}' \cdot d\vec{r}_{ij}{}'}{r_{ij}{}'} \tag{8.53}$$

である。ここで、$|\vec{r}|^2 = r^2$ の両辺の無限小変化を考えると、

$$\begin{aligned} |\vec{r} + d\vec{r}|^2 - |\vec{r}|^2 &= (\vec{r} + d\vec{r}) \cdot (\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{r} \cdot \vec{r} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} + |d\vec{r}|^2 \\ (r + dr)^2 - r^2 &= 2r\,dr + (dr)^2 \end{aligned} \tag{8.54}$$

であるので、1 次の微小量までで、

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r\,dr \quad \rightarrow \quad \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = dr \tag{8.55}$$

の関係を得る。式 (8.55) を式 (8.53) に代入すると、$\vec{r}_{ij}$ の大きさ r_{ij} のみの関数となり、

$$v_{ij}(r_{ij}) = -\int_{r_{ij}{}^{\mathrm{S}}}^{r_{ij}} f(r_{ij}{}')dr_{ij}{}' \tag{8.56}$$

で与えられる。

基準点 $\mathrm{P_S}$ としては、しばしば無限遠点 ($r_{ij}{}^{\mathrm{S}} = \infty$) が採用される。このとき、

$$v_{ij}(r_{ij} = \infty) = 0 \tag{8.57}$$

である。

例 1：万有引力ポテンシャル　質量 m_i と m_j を持つ 2 質点間に働く万有引力は

$$\vec{f}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}{}^2}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \tag{8.58}$$

であるから、ポテンシャルは無限遠点を基準点として、

$$v_{ij} = -\int_{\infty}^{r_{ij}} \left(-G\frac{m_i m_j}{r_{ij}{}^2}\right) dr_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{8.59}$$

で与えられる。これを**万有引力ポテンシャル**という。

例 2：クーロン・ポテンシャル　電荷 e_i と e_j を持つ 2 質点間に働くクーロン力 (静電気力) は

$$\vec{f}_{ij} = k\frac{e_i e_j}{r_{ij}{}^2}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (k \text{ は単位系による定数}) \tag{8.60}$$

であるから、ポテンシャルは無限遠点を基準点として、

$$v_{ij} = -\int_{\infty}^{r_{ij}} \left(k\frac{e_i e_j}{r_{ij}{}^2}\right) dr_{ij} = k\frac{e_i e_j}{r_{ij}} \tag{8.61}$$

で与えられる。これを**クーロン・ポテンシャル**という。

8.3.4 質点系の力学的エネルギー保存則

質点系のエネルギーと仕事の関係は、外力のした仕事と内力のした仕事を用いて、

$$T(t_B) - T(t_A) = \sum_i W_i(t_B, t_A) + \sum_i \sum_{j>i} W_{ij}(t_B, t_A) \tag{8.62}$$

と表される。内力を保存力とするとき、内力の全ポテンシャル、

$$v(t) = \sum_i \sum_{j>i} v_{ij}(\vec{r}_{ij}(t)) \tag{8.63}$$

を、この質点系の時刻 t における**内部位置エネルギー**という。内力のポテンシャルと内力のした仕事の間には、

$$w_{ij}(t_2,t_1)=v_{ij}(\vec{r}_{ij}(t_1))-v_{ij}(\vec{r}_{ij}(t_2)) \tag{8.64}$$

の関係がある (仕事をした分、ポテンシャル・エネルギーが減少する)。この関係を式 (8.62) に代入すると、

$$\begin{aligned} T(t_2)-T(t_1) &= \sum_i W_i(t_2,t_1)+\sum_i\sum_{j>i}[v_{ij}(\vec{r}_{ij}(t_1))-v_{ij}(\vec{r}_{ij}(t_2))] \\ &= \sum_i W_i(t_2,t_1)+v(t_1)-v(t_2) \end{aligned} \tag{8.65}$$

であるので、結局

$$[T(t_2)+v(t_2)]-[T(t_1)+v(t_1)]=\sum_i W_i(t_2,t_1) \tag{8.66}$$

を得る。これが内力が保存力である場合のエネルギー収支で、系の全エネルギーの増減は、外力のした仕事に等しいことを主張している。

さらに外力も保存力であるならば、外力 $\vec{F}_i$ のポテンシャルを V_i、全系の外力による位置エネルギーを

$$V(t)=\sum_i V_i(\vec{r}_i(t)) \tag{8.67}$$

とする。外力のポテンシャル (位置エネルギー) と外力のした仕事の間には、

$$W_i(t_2,t_1)=V_i(\vec{r}_i(t_1))-V_i(\vec{r}_i(t_2)) \tag{8.68}$$

の関係がある (仕事をした分、ポテンシャル・エネルギーが減少する)。この関係を式 (8.66) に代入すると、

$$T(t_2)+v(t_2)+V(t_2)=T(t_1)+v(t_1)+V(t_1) \tag{8.69}$$

となる。この式は、**質点系の全力学的エネルギー**を

$$E=T+v+V \tag{8.70}$$

と定義すると、

内力も外力も保存力であるならば、質点系の全力学的エネルギーは保存する

ことをあらわしている。

ここで、

$$\mathcal{V}=v+V \tag{8.71}$$

を**質点系の位置エネルギー**という。

$$\begin{aligned} -\mathrm{grad}_{\vec{r}_i}\mathcal{V} &= -\mathrm{grad}_{\vec{r}_i}\sum_j V_j(\vec{r}_j)-\mathrm{grad}_{\vec{r}_i}\sum_i\sum_{j>i}v_{ij}(\vec{r}_{ij}) \\ &= \vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij} \end{aligned} \tag{8.72}$$

であるから、質点系の運動方程式は、

$$m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=-\mathrm{grad}_{\vec{r}_i}\mathcal{V}\quad(i=1,\cdots,N) \tag{8.73}$$

と表される。

8.3.5 重心運動の分離

角運動量の場合と同じように、重心運動と内部運動に分けてエネルギーを表現してみる。
重心の位置ベクトルを $\vec{r}_G$、重心に対する相対位置ベクトルを $\vec{r}_i'$ とすると、全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_G}{dt}+\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)\left(\frac{d\vec{r}_G}{dt}\right)^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i'\right)\cdot\frac{d\vec{r}_G}{dt} \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{d\vec{r}_G}{dt}\right)^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)^2 \qquad \left(\because \sum_i m_i\vec{r}_i' = 0\right) \end{aligned} \tag{8.74}$$

である。右辺第 1 項は重心運動のみによるので、

$$T_G = \frac{1}{2}M\left(\frac{d\vec{r}_G}{dt}\right)^2 \tag{8.75}$$

を**重心運動の運動エネルギー**という。第 2 項は重心に対する相対運動のみで表されているので、

$$T_I = \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)^2 \tag{8.76}$$

を**内部運動の運動エネルギー**という。したがって、全運動エネルギーは、重心運動と内部運動エネルギーの和

$$T = T_G + T_I \tag{8.77}$$

に分解できることが分かる。
質点系の全エネルギーは、

$$E = T_G + T_I + V + v = \{T_I + v\} + T_G + V \tag{8.78}$$

で与えられる。$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_i' - \vec{r}_j'$ であるので、$\{\quad\}$ 内の部分

$$\mathcal{E} = T_I + v \tag{8.79}$$

は重心に対する相対座標とその速度のみで表される。そこで、$\mathcal{E}$ を**質点系の内部エネルギー**という。
特に孤立系では $V = 0$ とおける。また重心運動は、

$$M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = 0 \qquad (\because V = 0 \text{ より} \vec{F} = 0) \tag{8.80}$$

であるから、1 質点の場合と同様に、

$$T_G = \text{一定} \tag{8.81}$$

である。全力学的エネルギー保存則と合わせると、

$$\mathcal{E} = T_I + v = \text{一定} \tag{8.82}$$

を得る。すなわち、**孤立系では内部エネルギーが保存する**。

計算・メモ用余白