9　2体問題

この章では、多体系 (質点系) の最も簡単かつ基礎となる 2 体系を取り上げる。これまでに学んだ保存則の活用に慣れると共に、その理解を深めること。

9.1　重心運動と相対運動の分離

質量 m_1 を持つ質点 1 と、質量 m_2 を持つ質点 2 からなる孤立系を考える。例えば、質点 1 が地球、質点 2 が太陽で、他の天体の影響を無視するような場合である。

外力がないので、運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \qquad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} \tag{9.1}$$

である。ここで、位置ベクトル $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の代わりに、重心の位置ベクトル、

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \tag{9.2}$$

と、質点 2 に対する質点 1 の相対位置ベクトル、

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{9.3}$$

を独立変数に選ぶ (図 9.1 参照)。

$\vec{r}_G$ に対する運動方程式は、外力が働かないから

$$M \frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = 0 \tag{9.4}$$

である。一方、式 (9.1) から、

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \qquad (\because \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}) \tag{9.5}$$

となる。通常、内力 $\vec{F}$ は $\vec{r}$ のみの関数であるので、

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{9.6}$$

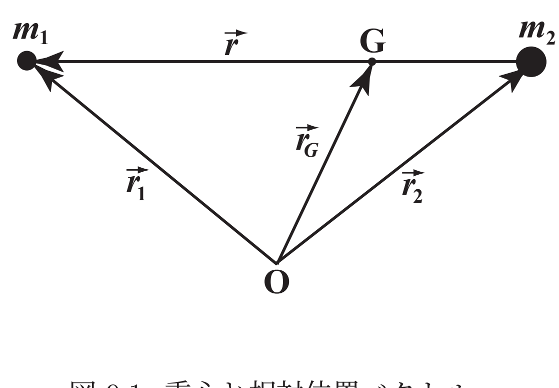

図 9.1: 重心と相対位置ベクトル。

と書くと、式 (9.5) は、$\vec{r}_G$ を含まず $\vec{r}$ のみの方程式

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})\,, \qquad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \tag{9.7}$$

となる。この式は、質量 μ、位置ベクトル $\vec{r}$ の質点に、力 $\vec{F}$ が作用している 1 質点の運動方程式とみることができる。

このように、孤立系の場合は変数変換、

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_G, \vec{r} \tag{9.8}$$

によって、運動方程式は 6 元連立のめんどうな方程式 (9.1) から、簡単に解ける重心運動の運動方程式 (9.4) と、3 元連立の**相対運動の運動方程式**(9.7) に分離できる。このことは、実際の問題を解く上で極めて有効であるが、外力のある場合には一般にはこの分離は成功しない。

9.2 平面運動の極座標表示

内力 $\vec{F}(\vec{r})$ が中心力の場合、相対運動の角運動量 $\vec{l}$ は保存し、

$$\vec{l} = \vec{r} \times \mu\frac{d\vec{r}}{dt} = 一定 \tag{9.9}$$

で、相対運動は面積速度一定の平面運動となる。

そこで、運動平面を (x, y) 平面とし、$\vec{l}$ の方向を z 軸とする座標系を考える (図 9.2 参照)。z 方向の運動は等速度直線運動 (静止を含む) であることは自明であるので、以下 2 次元 (x, y) で考える。運動方程式 (9.7) を成分表示で書くと、

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = \vec{F}_x\,, \qquad \mu\frac{d^2y}{dt^2} = \vec{F}_y \tag{9.10}$$

である。

ここで、直交座標の代わりに、2 次元の極座標 (r, θ) を用いる。直交座標との関係は、

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta \tag{9.11}$$

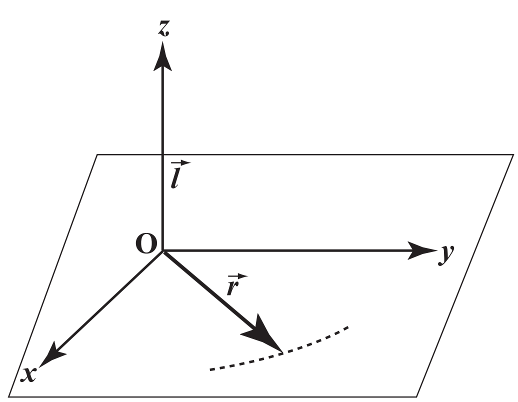

図 9.2: 平面運動と角運動量ベクトル。

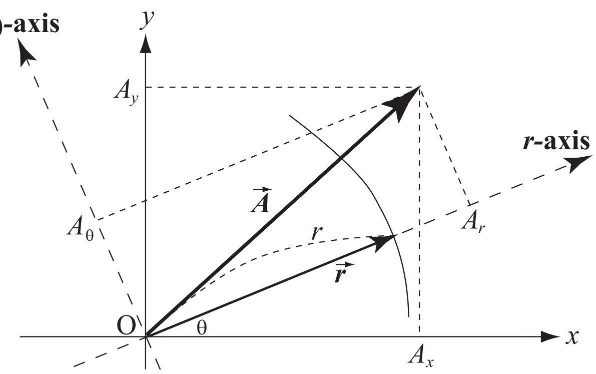

図 9.3: 2 次元極座標表示と、r および θ 方向成分。

である (図 9.3 参照)。まず、速度を r、θ とその時間微分で表すと、式 (9.11) より、

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - \frac{d\theta}{dt}r\sin\theta \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}r\cos\theta \end{aligned} \tag{9.12}$$

となる。

図 9.3 に示すように、θ を固定して r を増加させた時の移動方向を***r* 方向**、逆に r を固定して θ を無限小増加させたときの移動方向を***θ* 方向**と呼ぶ。任意のベクトル $\vec{A}$ の直交座標成分 (A_x, A_y) と、r 方向成分 A_r、θ 方向成分 A_θ の関係は、

$$\begin{aligned} A_r &= A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \\ A_\theta &= -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta \end{aligned} \tag{9.13}$$

で与えられる。

そこで、速度の r 方向成分 v_r、θ 方向成分 v_θ を求めると、

$$\begin{aligned} v_r &= v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \\ &= \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - \frac{d\theta}{dt}r\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}r\cos\theta\right)\sin\theta \\ &= \frac{dr}{dt} \end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} v_\theta &= -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \\ &= -\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - \frac{d\theta}{dt}r\sin\theta\right)\sin\theta + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}r\cos\theta\right)\cos\theta \\ &= r\frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \tag{9.15}$$

と簡単な形になる。

つぎに、加速度を r、θ とその時間微分で表すと、式 (9.12) より、

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned} \tag{9.16}$$

となる。したがって、加速度の r 方向成分 a_r、θ 方向成分 a_θ は、

$$\begin{aligned} a_r &= a_x \cos\theta + a_y \sin\theta = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 && (9.17) \\ a_\theta &= -a_x \sin\theta + a_y \cos\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) && (9.18) \end{aligned}$$

となる。

力も同様に、その r 方向成分 F_r、θ 方向成分 F_θ は、

$$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta\,, \qquad F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta \tag{9.19}$$

で与えられる。したがって、**2次元極座標表示での運動方程式**は、

$$\begin{aligned} \mu a_r = \mu\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] = F_r \\ \mu a_\theta = \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta \end{aligned} \tag{9.20}$$

と表される。

相対運動の角運動量の z 成分は、

$$\begin{aligned} l_z &= \mu(xv_y - yv_x) = \mu\left[r\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) - r\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\right] \\ &= \mu r^2\frac{d\theta}{dt} && (9.21) \end{aligned}$$

と書ける。したがって、θ 方向の運動方程式は、

$$\frac{1}{r}\frac{dl_z}{dt} = F_\theta \tag{9.22}$$

と表される。

最後に、2次元極座標表示での平面運動の運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\mu\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2}\mu\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] && (9.23) \end{aligned}$$

で与えられる。

9.3 中心力の場合の型式解

2質点間の力が中心力で、かつ保存力の場合、

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{9.24}$$

と書け、そのポテンシャルは、無限遠点をポテンシャルの基準点にとると、

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} f(r')dr' \tag{9.25}$$

と書ける。この力の r 方向成分と θ 方向成分は明らかに

$$F_r = f(r)\,, \qquad F_\theta = 0 \tag{9.26}$$

であるから、運動方程式は

$$\mu\left[\frac{d^2r}{dr^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = f(r) \tag{9.27}$$

$$\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{dl_z}{dt} = 0 \tag{9.28}$$

となる。式 (9.28) は、相対運動の角運動量保存則、

$$l_z = \mu r^2\frac{d\theta}{dt} = l \quad (一定) \tag{9.29}$$

を意味するにほかならない。したがって、角速度 $d\theta/dt$ は、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \tag{9.30}$$

と r だけの関数となる。ここで、l は初期条件から決まる。式 (9.30) を式 (9.27) に代入して、

$$\mu\frac{d^2r}{dt^2} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \tag{9.31}$$

となる。これは、r 方向の 1 次元の運動方程式で、2 つの力 $f(r)$ と $l^2/\mu r^3$ が働いている場合と等価である。$l^2/\mu r^3 (> 0)$ は r を大きくしようとする力で**遠心力**と呼ばれる。

つぎに、エネルギー保存則を用いて式 (9.31) を解く。孤立系では内部エネルギーが保存するので、

$$T + V = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + V(r) = E \quad (一定) \tag{9.32}$$

を得る。式 (9.30) を用いて、$(d\theta/dt)$ を消去して、

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{\mathrm{eff}}(r)\,, \qquad V_{\mathrm{eff}} \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{9.33}$$

と書ける。V_{eff} を**有効ポテンシャル**、$l^2/2\mu r^2$ を**遠心力ポテンシャル**という。

$$-\mathrm{grad}\frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{l^2}{\mu r^3} \tag{9.34}$$

より、遠心力ポテンシャルは、確かに遠心力を導くポテンシャルである。V_{eff} は式 (9.31) の右辺を力とみなしたときのポテンシャルである。

図 9.4 に、破線で与えられるような $V(r)$ に対して、$l \neq 0$ のときの V_{eff} を実線で描いた。図のようなエネルギー E_0 に対しては、運動可能領域が $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ であることが直ちにわかる。このような運動可能領域の上限や下限を与える r は、r についての**転回点**と呼ばれ、

$$E = V_{\mathrm{eff}}(r) \tag{9.35}$$

の根 (解) で与えられる。特に r の下限を与える転回点を**最近接距離**という。

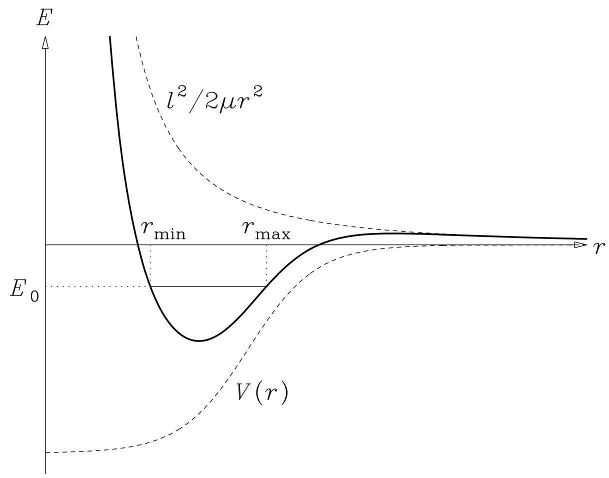

図 9.4: 有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ と運動可能領域。

> $l=0$ の場合や、$V(r)$ が $1/r^2$ より急激に $-\infty$ になる場合、最近接距離を与える式 (9.35) の根が存在しない場合がある。$r \geq 0$ であるから、この場合は $r=0$ を 1 つの転回点に含め、最近接距離とする。

さて、r に対する微分方程式となった式 (9.33) から、r と t の関係を求める。r 方向の速度は、

$$\frac{dr}{dt} = v_r(r) = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\rm eff}(r))} \tag{9.36}$$

である。r_0 を 1 つの転回点とし、$t=t_0$ で $r=r_0$ とすると、

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{dr}dr = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{dr/dt} \tag{9.37}$$

より、

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(2/\mu)(E - V_{\rm eff}(r))}} \tag{9.38}$$

と書ける。ここで、複号は時刻 t_0 直後、r が r_0 より増加する場合が $+$、減少する場合が $-$ である。運動領域が限られている場合、この式は、r がもう 1 つの転回点 r_0' に達するまで成り立つ。$r=r_0'$ に達した時刻を t_0' とすると、そこで改めて、

$$t - t_0' = \pm\int_{r_0'}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(2/\mu)(E - V_{\rm eff}(r))}} \tag{9.39}$$

として運動をたどれば、遂次 r と t の関係

$$r = r(t) \tag{9.40}$$

が得られる。式 (9.40) から r と t の関係が求まれば、θ と t の関係は、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \quad \rightarrow \quad \theta = \theta(t) = \theta_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{l}{\mu[r(t)]^2}dt \tag{9.41}$$

から得ることができる。ここで、$t = t_0$ で $\theta = \theta_0$ である。

以上から、運動は形式的に解かれた。ポテンシャル $V(r)$ が与えられたら、積分 (9.38) と (9.40) を行えば運動が具体的に求まる。ただし、積分が解析的に行える場合は特殊な $V(r)$ に限られており、一般には計算機による数値計算に頼ることになる。

9.3.1　軌道の方程式

例えば、後程学ぶ有名なケプラーの第一法則

地球の公転軌道は太陽を焦点とする楕円である

は、r と θ の関係のみに着目しており、r、θ 各々の時間依存性は気にしない。r と θ の関係は、積分 (9.38) と (9.40) を行い運動を求めた後、時間 t を消去すれば求まるが、以下のようにより直接的に求めることもできる。

これまでに求めた、次の 2 つの式、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\,, \qquad \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\mathrm{eff}}(r))} \tag{9.42}$$

から、

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} = \pm\frac{l}{\mu r^2\sqrt{(2/\mu)(E - V_{\mathrm{eff}}(r))}} \tag{9.43}$$

と書ける。この式を r で積分して、

$$\theta = \theta_0 \pm \int_{r_0}^{r} \frac{l}{\mu r^2\sqrt{(2/\mu)(E - V_{\mathrm{eff}}(r))}}dr \tag{9.44}$$

を得る。ここで、r_0 は 1 つの転回点で、ある時刻 $t = t_0$ に $r = r_0$ かつ $\theta = \theta_0$ であるとした。後は、t と r の関係について行ったのと同じ考察をすることにより、r と θ の関係式、

$$r = r(\theta) \tag{9.45}$$

を得る。これが**軌道の方程式**である。

計算・メモ用余白