

力学・同演習 中間試験I 問題(全5問)

担当教員：若狭 智嗣

試験日：5月25日

注意：解答に際しては、途中計算を適宜記載すること。

問1 ベルトコンベアが一定の速さ V で水平に土砂を連続的に運んでいる。土砂のベルトに乗る直前の速さは 0 とし、土砂とベルトの間の動摩擦係数を μ とする。以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

1.1 ベルトに乗った土砂が、ベルトと同じ速さで動き出すまでの時間 Δt を求めよ。

1.2 Δt の間に土砂が地上からみてどれだけの距離運ばれたか答えよ。

1.3 Δt の間に土砂がベルトの上をすべった距離を求めよ。

1.4 Δt の間に土砂が得た運動エネルギーは、ベルトコンベアのする仕事の何倍か答えよ
(注: 答えがベルトコンベアの効率になる)。

問2 位置座標 (x, y, z) にいる質点の持つ位置エネルギー $V(x, y, z)$ が、

$$V(x, y, z) = k\sqrt{y^2 + z^2} \quad (k \text{ は正の定数})$$

で与えられる場合を考える。

以下の問いに答えよ。

2.1 質点に働く力の x 成分 F_x 、 y 成分 F_y 、 z 成分 F_z を各々求めよ。

2.2 質点の原点のまわりの力のモーメントの x 成分 N_x 、 y 成分 N_y 、 z 成分 N_z を各々求めよ。

2.3 質点の原点のまわりの角運動量の x 成分 l_x 、 y 成分 l_y 、 z 成分 l_z のうち、保存するものを全てあげよ。

問3 質量 m の粒子が、原点からの中心力 $f(r)(\vec{r}/r)$ と、速度に比例する抵抗力 $-k(d\vec{r}/dt)$ を受けて運動している (k は正の定数)。ここで、 \vec{r} は粒子の位置ベクトルで、 $r = |\vec{r}|$ である。時刻 $t = 0$ で、この粒子の原点のまわりの角運動量が \vec{l}_0 であった場合、任意の時刻 $t (\geq 0)$ における原点の回りの角運動量 $\vec{l}(t)$ を求めよ。

裏面に続く。

問4 地上からロケットを発射する。ロケットは発射時のごく短時間のみ噴射するものとし、飛行中のロケットの質量 m は地球の質量 M より十分に小さく一定とする。ロケットは質点と見なし、空気の抵抗は無視する。地球の中心からロケットまでの距離を r として以下の問いに答えよ。ただし、万有引力定数を G とし、地球の半径を R とする。

4.1 2次元の極座標 (r, θ) においてロケットにはたらく力の成分を (F_r, F_θ) とすると、ロケットの運動方程式は、

$$F_r = m [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2], \quad F_\theta = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta})$$

とかける。ロケットの角運動量の大きさ L が保存する事を示せ。

4.2 ロケットの r に関する運動方程式を、 L を用いて表せ。

4.3 地上からロケットを真上に発射する場合を考える。ロケットの力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r}$$

が保存することを、**4.2** で求めた運動方程式を用いて示せ。

4.4 **4.3** において、ロケットが地球から離脱する (=地球の重力を振り切る) のに必要な地上における初速度 v_0 を求めよ。

4.5 ロケットを v_0 で真上に打ち上げた場合、地上から測った高さが $3R$ になるまでに要する時間を求めよ。

4.6 ロケットを距離 r の円軌道にのせたところ、地球を回る周期が T であった。 r と T の間に成り立つ関係式 (ケプラーの第3法則) を、**4.1** の運動方程式から導け。

4.7 **4.6** において円軌道の地上から測った高さが $3R$ の場合の周期を数値的に求め、静止衛星の軌道が $3R$ より高いか低いかを答えよ。必要なら以下の値を用いよ。

$$\frac{GM}{R^2} = g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

問5 図1のように、ばね定数 k 、自然の長さ l で重さの無視できるばねに質量 m の質点をつるす。時刻 $t < 0$ では、ばねの上端は静止しており、質点も静止していたものとする。時刻 $t \geq 0$ で、ばねの上端を振幅 A 、時間的変化 $\sin(\omega t)$ で振動させた場合について考える。以下の問いに答えよ。

ただし、座標軸は鉛直下向きに x 軸をとり、時刻 $t < 0$ でのばねの上端の位置を原点とする。また、重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗などの影響は無視してよい。

5.1 時刻 $t < 0$ でのばねののびを答えよ。

5.2 時刻 $t (\geq 0)$ での質点の位置を x とする。このときに質点に働く力 $F(x, t)$ を答えよ。

5.3 質点の運動方程式は $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t)$ であるが、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、 $y = x - l - \frac{g}{\omega_0^2}$ とすると、運動方程式は以下のような y に関する微分方程式に書き改めることができる。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \boxed{\text{①}} y = \boxed{\text{②}}$$

$\boxed{\text{①}}$ と $\boxed{\text{②}}$ に当てはまる数式を ω 、 ω_0 、 A 、 t を用いて表せ。

5.4 **5.3** で求めた微分方程式は、 $y = B \sin(\omega t)$ の解を持つ。定数 B を求めよ。ただし、 $\omega \neq \omega_0$ とする。

5.5 **5.3** の微分方程式で、 $\boxed{\text{②}} = 0$ の場合 (つまり左辺=0とした微分方程式) の一般解 (任意定数を2つ含む解) を求めよ。

5.6 $\omega \neq \omega_0$ のとき、**5.4** の結果と **5.5** の結果を加えたものが、**5.3** の微分方程式の一般解となっている。問題の初期条件を考慮して、**5.5** の任意定数を求め、 y を時刻 t の関数として表せ。

5.7 $\omega = \omega_0$ の時の解は、**5.6** の解で $\omega \rightarrow \omega_0$ の極限をとることにより得られ、結果、

$$y = \boxed{\text{③}} \left[\boxed{\text{④}} \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \right]$$

となる。 $\boxed{\text{③}}$ と $\boxed{\text{④}}$ に当てはまる数式を ω_0 、 A 、 t を用いて表せ。(ヒント：極限をとることで、式の一部が微分の定義そのもの (つまり微係数) になる。)

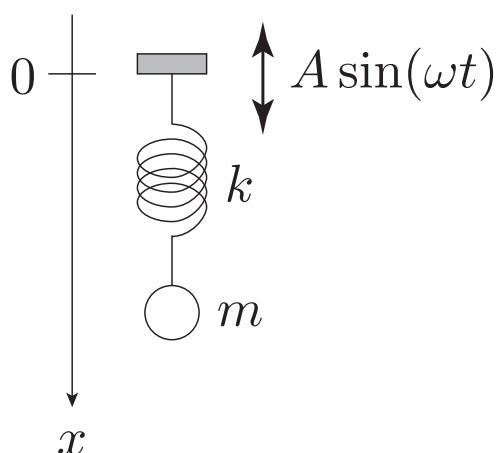


図1