

力学・同演習 中間試験II 問題(全5問)

担当教員：若狭 智嗣

試験日：6月29日

注意：解答に際しては、途中計算を適宜記載すること。

問1 ベクトル $\vec{A} = (1, 2, 3)$ 、 $\vec{B} = (3, 2, 1)$ について以下の問いに答えよ。

1.1 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ を求めよ。

1.2 $\vec{A} \times \vec{B}$ を求めよ。

問2 なめらかな水平面上を、時刻 $t = 0$ に初速 v_0 で水平に打ち出された質量 m の物体の運動を考える。物体の速さを v とすると、物体には速さの2乗に比例する空気抵抗 $f = -\alpha v^2$ がはたらく。ここで、 α は正の定数であり、マイナス符号は空気抵抗の向きが速度と逆向きであることを表している。物体には空気抵抗以外の摩擦力ははたらかないとして、以下の問いに答えよ。

2.1 時刻 $t (t > 0)$ における物体の速さを求めよ。

2.2 物体の速さが $v_0/2$ になる時刻を求めよ。

2.3 物体が時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間に進む距離を求めよ。

2.4 物体が静止するまでに進む距離を求めよ。

問3 質量 m 、長さ l の完全に柔軟かつ一様なヒモがある。最初 (時刻 $t = 0$)、このヒモの長さ $l_0 (< l)$ の部分が机の端から下がった状態で、机上のヒモを手で押さることによって静止している。手を放すと、机の端から下がった部分が落下することにより、ヒモが机上から落ちていくとする。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。但し、机とヒモの間の摩擦や、ヒモにはたらく空気抵抗は無視できるものとする。

3.1 ヒモの線密度を答えよ。

3.2 ヒモの運動を xy 平面に限り、 x 軸を水平方向、 y 軸を垂直方向 (鉛直下向きが正) とする。水平方向のヒモの長さ (=机上のヒモの長さ) を x 、垂直方向のヒモの長さ (=机の端から下がっているヒモの長さ) を y とする。ヒモにはたらく張力の大きさを T とおいて、ヒモの水平方向、垂直方向それぞれに対する運動方程式を表せ。

(ヒント:水平方向には張力 T は x を減らす (ヒモを落下させる) ようにはたらく、垂直方向には y を減らす (ヒモの落下を妨げる) ようにはたらく)。

3.3 ヒモの長さ l を x と y を用いて表せ。

3.4 3.3 の結果を用いて、 d^2x/dt^2 と d^2y/dt^2 の間の関係を求めよ。

3.5 3.2 で求めた2つの方程式から張力 T を消去し、さらに 3.4 で求めた関係を用いて x を消去し、 y に関する微分方程式を求めよ。

3.6 3.5 で求めた微分方程式を初期条件を考慮して解いて、時刻 t で机の端から下がっているヒモの長さ $y(t)$ を求めよ。

問4 電車の中に、質量の無視できる長さ l の糸の先に質量 m の質点がついた振り子を吊した。電車に固定された鉛直軸からの振れ角を θ とする。電車が定速走行中、振り子は $\theta = 0$ で鉛直方向に静止していたが、時刻 $t = 0$ に電車にブレーキがかかったため、最大 $\theta = \phi (> 0)$ まで振れ、電車が停止するまでにちょうど n 回振れた ($n > 1$)。ブレーキによる加速度の大きさは一定であるとして、以下の問いに答えよ。なお、重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視できるものとする。

4.1 電車の加速度の大きさを a として、振れ角 θ の満たす運動方程式を求めよ。ただし、 θ の大きさは十分小さいものとし、 $\sin \theta \sim \theta$ 、 $\cos \theta \sim 1$ と近似せよ。

4.2 $t = 0$ での初期条件を考慮して 4.1 の運動方程式を解き、 $t = 0$ から電車が静止するまでの θ を t の関数として表せ。

4.3 最大の振れ角が ϕ であることを用いて a の値を求め、 g と ϕ を用いて表せ。

4.4 電車が静止する時刻を求め、 l 、 g 、 n を用いて表せ。

4.5 定速走行中の電車の速さを求め、 l 、 g 、 n 、 ϕ を用いて表せ。

問5 長さ l の一様な棒が図1のように、水平な床と高さ h の垂直な壁のふちとにかかっている。壁および床との摩擦係数を μ とする。棒が滑り出す直前の棒と水平面のなす角を θ とすると、

$$\frac{2\mu h}{(1 + \mu^2)l} = \sin^2 \theta \cos \theta$$

が成り立つことを示せ。

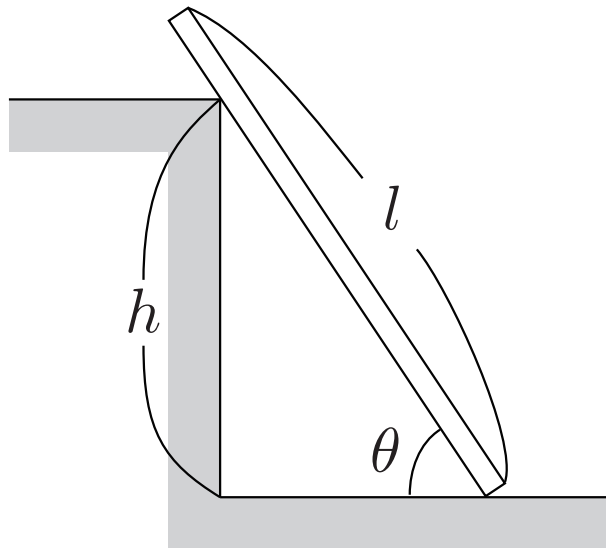


図1