力学・同演習　中間試験I　略解

担当教員：若狭 智嗣
試験日：5 月 25 日

問１ **1.1** 土砂の質量を m として、動摩擦力は μmg であるので、加速度は μg である。土砂の速さが V なるまでの時間が Δt であるので、$\underline{\Delta t = V/(\mu g)}$。

1.2 土砂は等加速度運動するので、$(\mu g)\Delta t^2/2 = V^2/(2\mu g)$

1.3 Δt の間にベルトが進んだ距離は $V\Delta t = V^2/(\mu g)$ であるので、すべった距離は $\underline{V^2/(2\mu g)}$。

1.4 運動エネルギーは $mV^2/2$。仕事は $(\mu mg)\cdot V^2/(\mu g) = mV^2$。従って $\underline{1/2\ 倍}$。

問２ **2.1**

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{ky}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{kz}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

2.2 $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ であるので、

$$N_x = yF_z - zF_y = 0, \quad N_y = zF_x - xF_z = \frac{kxz}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad N_z = xF_y - yF_x = -\frac{kxy}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

2.3 $\dfrac{d\vec{l}}{dt} = \vec{N}$ であるので、トルク (力のモーメント) が 0 である x 成分のみ保存する。

問３

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \left[f(r)\frac{\vec{r}}{r} - k\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = -\frac{k}{m}\vec{r} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{k}{m}\vec{l} \qquad \rightarrow \qquad \therefore \quad \vec{l} = \vec{l}_0 e^{-(k/m)t}$$

問4 **4.1** 万有引力は中心力であるので、$F_\theta = 0$。$L = mr^2\dot{\theta}$ であるので、θ に関する運動方程式から $\dfrac{dL}{dt} = 0$ となり L は保存する。

4.2

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}$$

4.3 真上に発射するので $L = 0$ であり、運動方程式から、

$$m\ddot{r} + \frac{GMm}{r^2} = 0$$

力学的エネルギー E を微分して、

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{r}\ddot{r} + \frac{GMm}{r^2}\dot{r} = \dot{r}\left[m\ddot{r} + \frac{GMm}{r^2}\right] = 0(\because \text{運動方程式})$$

4.4 $E = 0$、$r = R$ として、

$$v_0 = \dot{r} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

4.5 $E = 0$ であるので、

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2GM}}\sqrt{r}dr = dt$$

であるので、$r = R$ から $4R$ まで積分して、

$$t = \frac{1}{\sqrt{2GM}}\int_R^{4R}\sqrt{r}dr = \frac{1}{\sqrt{2GM}}\left[\frac{2}{3}r^{3/2}\right]_R^{4R} = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(= \frac{14}{3}\frac{R}{v_0}\right)$$

4.6 円軌道なので、

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0, \quad r = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \text{const} = \frac{2\pi}{T}$$

であるので、運動方程式から、

$$-mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = -\frac{GMm}{r^2}, \quad \rightarrow \quad T^2 = r^3\frac{4\pi^2}{GM}$$

4.7

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{(4R)^3}{GM}} = 2\pi\cdot 4\sqrt{\frac{1}{GM/R^2\times 5}(10R)\cdot 2} = 2\cdot 3.14\cdot 4\sqrt{\frac{64\times 10^6}{49}}\sqrt{2} \\ &= 2\cdot 3.14\cdot 4\frac{8\times 10^3}{7}1.41 = 4.0\times 10^4\,\mathrm{s} < 86,400\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

と自転の周期より短いので、静止衛星の軌道は $3R$ より高い。

問5 **5.1** ばねののびを a として $mg = ka$ より、$a = \frac{mg}{k}$

5.2 $F(x,t) = mg - k(x - l - A\sin(\omega t))$

5.3

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg - k(x - l - A\sin(\omega t)) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= g - \frac{k}{m}(x - l - A\sin(\omega t)) \\ &= -\omega_0^2\left(x - l - \frac{g}{\omega_0^2}\right) + \omega_0^2 A\sin(\omega t) \\ \therefore \quad \frac{dy^2}{dt^2} + \omega_0^2 y &= \omega_0^2 A\sin(\omega t) \end{aligned}$$

5.4

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2)B\sin(\omega t) &= \omega_0^2 A\sin(\omega t) \\ \therefore \quad B &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}A \end{aligned}$$

5.5 $C\sin(\omega_0 t) + D\cos(\omega_0 t)$

5.6 初期条件より、$C = -\frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}A,\ D = 0$ と求まるので、

$$y = -\frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}A\sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}A\sin(\omega t)$$

5.7

$$\begin{aligned} y &= \frac{\omega_0 A}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}\left[\omega_0\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega_0 t)\right] \\ &= \frac{\omega_0 A}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}\left[\omega_0\sin(\omega t) - \omega_0\sin(\omega_0 t) + \omega_0\sin(\omega_0 t) - \omega\sin(\omega_0 t)\right] \\ &= \frac{\omega_0 A}{(\omega_0 + \omega)}\frac{\omega_0\sin(\omega t) - \omega_0\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 - \omega} + \frac{\omega_0 A}{\omega_0 + \omega}\sin(\omega_0 t) \\ &= -\frac{\omega_0^2 At}{(\omega_0 + \omega)}\frac{\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega t - \omega_0 t} + \frac{\omega_0 A}{\omega_0 + \omega}\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$\omega \to \omega_0$ として、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\omega_0^2 At}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0 A}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t) \\ &= \frac{A}{2}\left[-\omega_0 t\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\right] \end{aligned}$$