

10 平均場近似と殻模型

原子中の多電子系を扱うのに有効な近似は、ある電子にはたらくポテンシャルが原子核によるものと他の電子が作る平均ポテンシャルの和で与えられるとし、このポテンシャルの中を各電子が独立に運動しているとする**平均場近似** (mean field approximation)、あるいは**独立粒子模型** (independent particle model) である。この近似は、原子の周期律を電子の殻構造として説明する。原子核における魔法数の存在は、原子核にも殻構造があり、原子核中の核子の運動を平均場近似で記述出来ることを示唆している。

核力ポテンシャルを2体の v_{ij} に限るならば、原子核のハミルトニアンは、核子の運動量を \mathbf{p}_i として、

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij} \quad (1)$$

で与えられる。現実には、核力の複雑さから H の固有値と固有状態を正確に求めることは不可能である。そこで行う最も簡単な近似が平均場近似である。一体ポテンシャルを V_i とすると、

$$H = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_i \right) + \Delta H, \quad \Delta H = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij} - \sum_i V_i \quad (2)$$

であるが、適切な V_i を選ぶことにより2体相互作用 v_{ij} は V_i に十分取り込めるとして ΔH を無視して、

$$H \simeq \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_i \right) \quad (3)$$

と近似する。式(1)の H は V_{ij} を通して、核子 i は核子 j の影響を受ける。これに対して式(3)の H は異なる核子を結びつけるものではなく、個々の核子は1体ポテンシャル V_i 中を独立に運動することになる。フェルミガス模型のところで述べたように、原子核中での核子-核子散乱は、散乱後の核子の状態が既に他の核子により占有されている場合、パウリの排他原理により禁止される。このことは、核子が他の核子の影響を受けずに自由に(独立に)運動する確率が高くなる事を意味する。したがって、核力の効果を平均ポテンシャル V_i で置き換える平均場近似が成立する。

V_i をハートリー・フォックの方法等を用いて、 v_{ij} から求める事はできるが、ここでは適当な1体ポテンシャルを仮定して原子核の性質が説明できるかを調べて行くことにする。平均場近似では、核子が1粒子ハミルトニアン $H_i = \mathbf{p}_i^2/2m + V_i$ のどの固有状態を占めるかを指定する事により原子核の状態を表す。パウリの排他原理から、2つの核子が同じ1粒子状態を占有することは出来ない。したがって、原子核の基底状態は、エネルギーが最低の1粒子状態から順に核子を詰めた状態になる。

10.1 1体ポテンシャル

一体ポテンシャル V_i としてどのようなものを用いるのがよいか、大まかに考察してみる。

今、 \mathbf{r} にある核子に着目し、 \mathbf{r}' にある他の核子による相互作用の効果を平均化することを考える。 \mathbf{r}' に核子が存在する確率は、密度 $\rho(\mathbf{r}')$ で与えられるから、

$$V(\mathbf{r}) \simeq \int v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4)$$

と考えられる。ここで $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は、2つの核子がそれぞれ \mathbf{r} と \mathbf{r}' にあるときにはたらく核力である。これを**ハートレー (Hartree) の平均ポテンシャル**という。核子間の相互作用は大部分が平均ポテンシャルを作るのに使われ、残りの2核子間の相互作用(これを**残留相互作用** (residual interaction) という)の効果は小さくなり無視できると考えるわけである。

このような考え方は、原子中の電子の運動に対して初めて考えられた。この場合、電子に働く原子核からのクーロンポテンシャルだけでは実際の閉殻が説明できず、存在する他の電子からのクーロン斥力相互作用を平均した、ハートレーポテンシャルを付加することにより、見事に現実の原子の閉殻が説明できたのである。

簡単のため、 v のスピン・アイソスピン依存性を無視する。原子核の場合、核力は先の中間子論のところで見たように、核子間が近接した時のみに働く**短距離相互作用** (short range interaction) である。短距離力の極限はデルタ関数力 (delta force) で与えられ、この場合は積分が簡単に実行でき、平均ポテンシャルは、

$$\text{デルタ力: } v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -v_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Rightarrow V(\mathbf{r}) = -v_0\rho(\mathbf{r}) \quad (5)$$

となり、**平均ポテンシャルは密度に比例することになる。**

10.2 平均ポテンシャル中の1粒子準位

原子核の密度分布 $\rho(r)$ はウッズ・サクソン型がよく用いられる。ウッズ・サクソン型は原子核内部ではほぼ一定で、核表面で急激に減少する。これを数学的に扱いやすいポテンシャルで近似するならば、その候補は調和振動子型ポテンシャル、

$$V(r) \simeq V_{\text{HO}} = V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (6)$$

である。

ウッズ・サクソン型ポテンシャルは図1に示す通り、調和振動子型に比べて原子核表面でより深くなっている。この影響は、遠心力のためにより外側(表面付近)の存在確率が高い、大きな軌道角運動量 l を持つ状態に対して影響が大きく、エネルギー的に下がる。この影響を取り入れるために、

$$V(r) \simeq V_{\text{HO}} + a_l l^2 \quad (7)$$

のポテンシャルもよく用いられる。

ここでは、これらのポテンシャルの1粒子軌道を求め、実際の原子核の魔法数を説明できるか調べていく。

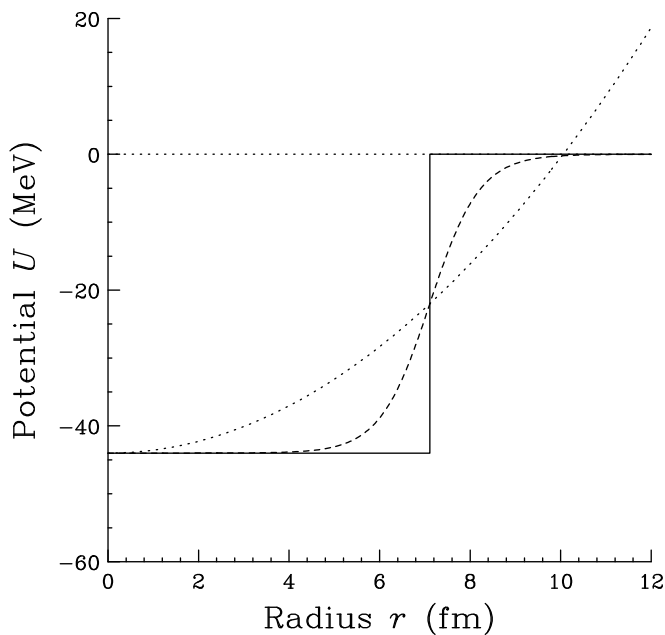


図1: 色々な形の一体ポテンシャル。実線: 井戸型。破線: ウッズ・サクソン型。点線: 調和振動子型。

[補足] ポテンシャルの形と角運動量

調和振動子型以外で簡単なポテンシャルとしては、有限の深さ $-U$ の井戸型ポテンシャルがある。図1に示す通り、それぞれのポテンシャルの形を見れば、

調和振動子 → ウッズ・サクソン型 → 井戸型

と変化するに従って、原子核表面付近でより深くなっている。これによって、遠心力のためにより外側(表面付近)での存在確率の高い角運動量 l の大きな軌道が、エネルギー的に下がってくる。他方、クーロンポテンシャルはこの方向と逆(調和振動子型に比べ、 r の大きなところでのポテンシャルが浅い)であるため、角運動量 l の小さな軌道がエネルギー的に下がる。このように、原子核の平均ポテンシャルと原子中の電子のポテンシャルは質的に異なり、結果として縮退の解け方も異なる。

■調和振動子型の場合

調和振動子型ポテンシャル、

$$V_{\text{HO}} = V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (8)$$

において、 ω はポテンシャル、すなわち密度の広がりを表す。そこで、 ω は実験的に知られている原子核の平均二乗半径 $\langle r^2 \rangle$ を再現するように決める。 A 核子系の $\langle r^2 \rangle$ は、

$$A\langle r^2 \rangle = \sum_{n_1 n_2 n_3} \langle n_1 n_2 n_3 | r^2 | n_1 n_2 n_3 \rangle \quad (9)$$

で与えられる。ここで、 $|n_1 n_2 n_3\rangle$ は (n_1, n_2, n_3) で指定される3次元調和振動子の状態で、和は核子が占有されている状態について行う。調和振動子の場合、**ビリアル定理**により運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの期待値が等しいので、

$$2 \times \left\langle \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \right\rangle = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (10)$$

である。したがって、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の期待値は、

$$\langle n_1 n_2 n_3 | r^2 | n_1 n_2 n_3 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(N + \frac{3}{2} \right) \equiv \langle r^2 \rangle_N \quad (11)$$

である。簡単のため、陽子と中性子は共に $N = 0, 1, \dots, N_{\max}$ まで詰まっているとすると、

$$A \langle r^2 \rangle = \underbrace{2 \times 2}_{\text{スピンアイソスピン自由度}} \sum_{N=0}^{N_{\max}} g(N) \langle r^2 \rangle_N = \frac{2\hbar}{m\omega} \sum_{N=0}^{N_{\max}} (N+1)(N+2) \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (12)$$

となる。ここで、 $g(N) = (N+1)(N+2)/2$ は $N = n_1 + n_2 + n_3$ の状態の縮退度である。

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (13)$$

を使うと、

$$A \langle r^2 \rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} \frac{1}{4} (N_{\max} + 1)(N_{\max} + 2)^2 (N_{\max} + 3) \xrightarrow{N_{\max} \gg 1} \frac{\hbar}{2m\omega} (N_{\max} + 2)^4 \quad (14)$$

と計算出来る。これから $\hbar\omega$ (エネルギー準位の間隔) は、

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2Am \langle r^2 \rangle} (N_{\max} + 2)^4 \quad (15)$$

となる。核子が占めている1粒子状態の総数は核子数に等しいから、

$$A = \underbrace{2 \times 2}_{\text{スピンアイソスピン自由度}} \sum_{N=0}^{N_{\max}} g(N) = \frac{2}{3} (N_{\max} + 1)(N_{\max} + 2)(N_{\max} + 3) \xrightarrow{N_{\max} \gg 1} \frac{2}{3} (N_{\max} + 2)^3 \quad (16)$$

である。式(16)から N_{\max} を A で表し、式(15)に代入すると、

$$\hbar\omega = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{m \langle r^2 \rangle} A^{1/3} \quad (17)$$

を得る。

原子核を球とすると、平均二乗半径は、

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2, \quad R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \simeq 1.2 \text{ fm} \quad (18)$$

である。これと mc^2 および $\hbar c$ の具体的な値を式(17)に代入すると、

$$\hbar\omega \simeq 41 A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (19)$$

を得る。 $A = 100, 200$ のとき、 $\hbar\omega$ の値はそれぞれ 8.8 MeV、7.0 MeV となる。

調和振動子型ポテンシャルの場合、準位が等間隔であるので、各 N の軌道が殻 (shell) を構成し、 $0 \leq N \leq N_{\max}$ まで完全に核子が詰まると閉殻 (closed shell) になる。すなわち、陽子または中性子の個数は、

$$[N \text{ or } Z]_{\text{閉殻数}} = \underbrace{2}_{\text{スピン自由度}} \cdot \sum_{N=0}^{N_{\max}} g(N) = \frac{1}{3} (N_{\max} + 1)(N_{\max} + 2)(N_{\max} + 3) \quad (20)$$

となる。これから、 N_{\max} と縮退度 $g(N)$ 、閉殻数 (魔法数) の関係は、

N_{\max}	0	1	2	3	4	5	6
$g(N)$	1	3	6	10	15	21	28
閉殻数 (魔法数)	2	8	20	40	70	112	168

となり 20 までの魔法数は説明できるが、それ以上は調和振動子型ポテンシャルでは理解できない。

■調和振動子型+ l^2 の場合

現実的なウッズ・サクソン型ポテンシャルに近づけるため、調和振動子型ポテンシャルに l^2 に比例する項を加えた、

$$V_{\text{HO}+l^2} = V_{\text{HO}} + a_l(l^2 - \langle l^2 \rangle) = V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + a_l(l^2 - \langle l^2 \rangle_N) \quad (21)$$

を考える。 $a_l < 0$ ならば l の大きいエネルギー状態のエネルギー固有値は下がる (ウッズ・サクソン型の場合に近づく)。定数

$$\langle l^2 \rangle_N = \frac{\sum_l \sum_{m_l} l^2}{\sum_l \sum_{m_l} 1} = \frac{\sum_l l(l+1)(2l+1)}{\sum_l (2l+1)} = \frac{N(N+3)}{2} \quad (22)$$

は同じ N 殻内で異なる l を持つ準位に関する l^2 の平均値であり、 $(2l+1)$ は縮退度である。殻間の平均的エネルギー差が l^2 により変化しないように、 l^2 から平均値を差し引いている。

3次元調和振動子型ポテンシャルの場合、エネルギー固有値が、

$$E_{\text{HO}} = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right), \quad N = 2n_r + l, \quad (n_r, l = 0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

であり、 l^2 の固有値が $l(l+1)$ であるので、式 (21) のポテンシャルに対するエネルギー固有値は、

$$\begin{aligned} E_{\text{HO}+l^2} &= \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) + a_l[l(l+1) - \langle l^2 \rangle_N] \\ &= \hbar\omega \left(2n_r + l + \frac{3}{2} \right) \left[l(l+1) - \frac{N(N+3)}{2} \right], \quad (N = 2n_r + l) \end{aligned} \quad (24)$$

で与えられる。

式 (24) のエネルギー固有値の様子を図に示す。ただし、 $A = 142$ で、

$$a_l = -0.026\hbar\omega = -0.204 \text{ MeV} \quad (25)$$

としている。 $a_l l^2$ のため、調和振動子型ポテンシャルにおける l の縮退は解け、大きい l の状態ほどエネルギー固有値は下がる。しかしながら図から分かるように、この場合も実験的な魔法数を再現することはできない。例えば $1f$ 状態が $N = 2$ の状態に近づいたとすると、魔法数は 20 から 34 になる。しかし 28 にはならない。

その後の研究から、空間座標 r のみに依存するどのような形のポテンシャルを用いても、28 以上の魔法数をうまく説明できないことが明らかになった。

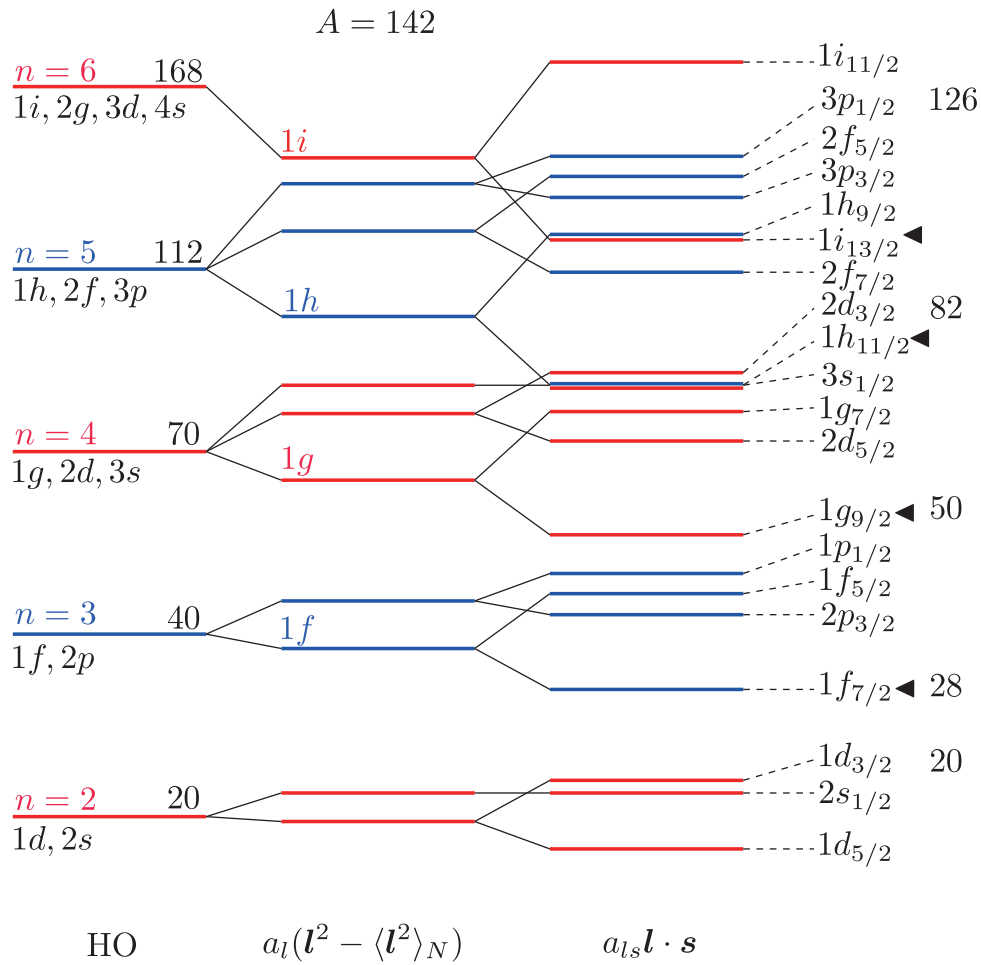


図 2: 色々な一体ポテンシャルの場合の 1 粒子エネルギー準位。左は 3 次元調和振動子の準位。真中は現実的なポテンシャル (例えばウッズ・サクソン型) の性質を付加する為に l^2 の項を加えた場合。右が更にスピン軌道ポテンシャルを加えた場合で、原子核の魔法数が見事に再現されている。

10.3 スピン-軌道相互作用

“どんな形のポテンシャルを用いても、原子核の魔法数を説明できない” という問題を解決したのは、メイヤーとイエンゼン (Mayer and Jensen, 1949) であった。それには、空間座標以外にスピンの依存するポテンシャルを考える必要があった。

核力の一般論を考えた時と同様に、運動量の 1 次までで種々の不変性 (対称性) を満たすものは $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ であり、**スピン軌道相互作用** $U_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ を合わせて、

$$U(r) = U_{\text{central}}(r) + U_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \tag{26}$$

の形のポテンシャルを考えた。この時、独立粒子状態を考えると、スピン軌道相互作用のために l_z や s_z は良い量子数ではなくなり、軌道角運動量とスピンを合成した全角運動量

$$\text{全角運動量 : } \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \tag{27}$$

の固有状態がエネルギーの固有状態を指定する良い量子数になる ($j = l \pm 1/2$)。従って、独立粒

子状態の波動関数は、角運動量の合成のところでやったように C-G 係数を用いて、

$$|nljm\rangle \equiv \psi_{nljm}(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) \sum_{m_l, m_s} \langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \rangle Y_{lm_l}(\theta, \phi) | \frac{1}{2} m_s \rangle \quad (28)$$

となる。このような状態の分類を ***jj*-結合 (coupling) スキーム** といい、各状態は「 $n_r l_j$ 」と j の値を下付きの添え字で表される。ここで、

動径方向のノード数 $n_r = 0, 1, 2, \dots$

軌道角運動量の大きさ $l = 0, 1, 2, 3, \dots \rightleftharpoons s, p, d, f, \dots$

であり、例えば $n_r = 0, l = 2, j = 5/2$ の状態は $0d_{5/2}$ のように書く。*jj*-結合状態はエネルギーの固有状態であり、それぞれは $(2j+1)$ 重に縮退している。また、*jj*-結合により上下スピンに対する縮退が解け、軌道角運動量に対するスピンの相対的な向きによってエネルギーが異なることになる。

どれだけエネルギーが分離 (split) するかは、スピン軌道相互作用 (ポテンシャル) の期待値を調べればよい。簡単のため $U_{ls}(r) = a_{ls}$ (定数) とおくと、

$$\begin{aligned} \Delta_{jl} &= \langle nljm | U_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} | nljm \rangle = a_{ls} \langle jm | \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} | jm \rangle \\ &= a_{ls} \times \begin{cases} \frac{1}{2}l & j = j_> = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & j = j_< = l - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

である。ここで、

$$\langle jm | \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} | jm \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad \left[\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2) \right] \quad (30)$$

を用いた。

従って、エネルギー分離の大きさは、

$$\Delta E_{ls} = \Delta_{j>l} - \Delta_{j<l} = \underbrace{a_{ls}}_{<0 \text{ 引力}} \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad (31)$$

となり、 **l が大きくなるのに比例して、エネルギー分離は大きくなる**¹。現実的なポテンシャルの場合、 $a_{ls} < 0$ の引力であり、 $j = l + 1/2$ のスピンの向きが軌道角運動量 l と平行になった状態の方がエネルギーが下がる。このことにより、 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ ポテンシャルが強い場合 (l が大きい場合)、それが無かった時の N 殻の中で最大の j を持つ状態 (最も大きな l で $j = l + 1/2$ の状態) が大きくエネルギーを下げ、 $N - 1$ 殻の状態群に侵入することにより、殻構造が変更され得る。これらの状態は $N - 1$ 殻の状態とはパリティが異なり、**侵入軌道** (intruder orbit) あるいは**特異パリティ軌道** (unique-parity orbit) と呼ばれる。なお、 $j = l - 1/2$ 状態はスピン軌道力のためエネルギーは上がるが、 $N + 1$ 殻に侵入することはない。

実際の原子核の場合、 $l \leq 2$ の場合はこの効果 (スピン・軌道力の効果) は小さく殻構造の変化は現れないが、 $l \geq 3$ の $0f_{7/2}$ 以降、 $0g_{9/2}, 0h_{11/2}, 0i_{13/2}, 0j_{15/2}$ の各軌道に対してこのことが起こり、見事に 28 以上の魔法数が説明された。これを、**メイヤーとイエンゼンの (球形) 殻模型** という。

¹実際には a_{ls} が l に依存するのでそのことを考慮する必要がある。

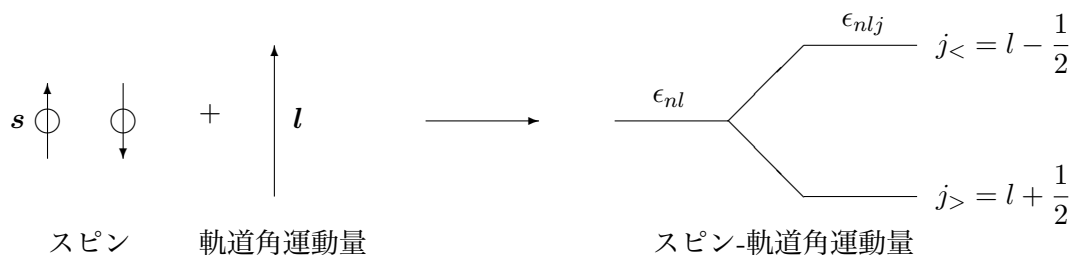


図 3: スピン-軌道相互作用の概念図。

■スピン軌道相互作用を考慮した原子核の殻構造

以前考えた、調和振動子型ポテンシャルに l^2 に比例する項を加えたポテンシャル $V_{\text{HO}+l^2}$ に、さらにスピン軌道相互作用を加えたものを考える。エネルギー固有値は、

$$\begin{aligned}
 E_{\text{HO}+l^2+l_s} &= \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) + a_l [l(l+1) - \langle r^2 \rangle_N] + a_{l_s} \Delta_{jl} \quad (N = 2n_r + l) \\
 &= \hbar\omega \left(2n_r + l + \frac{3}{2} \right) \left[l(l+1) - \frac{N(N+3)}{2} \right] + a_{l_s} \times \begin{cases} \frac{1}{2}l & j = j_{>} = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & j = j_{<} = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (32)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

式 (32) のエネルギー固有値の様子を図 2 に示す。ただし、 $A = 142$ で、

$$a_l = -0.026\hbar\omega = -0.204 \text{ MeV}, \quad a_{l_s} = -0.15\hbar\omega = -1.18 \text{ MeV} \quad (33)$$

としている。スピン軌道相互作用 $a_{l_s} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ により、 $l \neq 0$ の状態は $j = l + 1/2$ と $j = l - 1/2$ の状態に分離する。それぞれの縮退度は $2j + 1$ 、つまり $2l + 2$ と $2l$ である。 $a_{l_s} < 0$ のとき、 $j = l + 1/2$ の状態は $a_{l_s} \Delta_{jl} = a_{l_s} l/2$ だけエネルギーが下がり、 $j = l - 1/2$ の状態は $-a_{l_s}(l+1)/2$ だけエネルギーが上がる。この変化は l が大きい状態ほど大きい。したがって、スピン軌道相互作用が十分強く、 $|a_{l_s}|l/2 \sim \hbar\omega$ であるならば、図で ◀ を付けた状態が侵入軌道となり殻構造の変化を引き起こす。これにより、実験的に知られた魔法数が見事に再現される。

10.4 原子核のスピン

原子核の魔法数はメイヤーとイエンゼンの殻模型によって説明される。しかしながら、殻模型すなわち独立粒子近似がどれだけ良い近似になっているかは、(独立粒子近似で無視した) 残留相互作用がどれだけ重要な役割を果たすかと表裏一体である。

現実の原子核では、独立粒子近似で無視した核内核子間の残留相互作用は無視できない。そのもっとも顕著な例が**対相関**である。これは、2つの同種粒子が全角運動量を 0^+ に組む時 (0^+ 核子対²⁾、特に引力的に強く働き系を安定化させるというものである。対相関は、質量公式において対エネルギー (エネルギーギャップ) の形でその効果を表している。

対相関を考慮すると、**全ての偶々核の基底状態の J^π は 0^+** となり例外の無い規則となっている。

偶々核の基底状態： $J^\pi = 0^+$ 例外無し

²⁾ 0^+ 核子対は、金属中の伝導電子のクーパー対 (Cooper pair) に対応している。

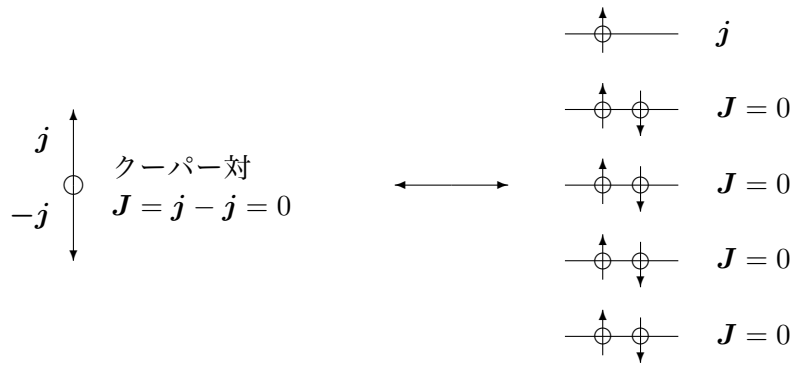


図 4: 対相間により形成される核子の 0^+ 核子対 (クーパー対) の概念図。奇核のスピンのパリティは最後のクーパー対を形成しない核子の占有軌道により決まる事が期待される。

これに対して、対を組めない核子が存在する奇核では、最後の核子がどの軌道を占有するかに従って、基底状態の J^π が決まると考えられる。

奇核の基底状態: $J^\pi = j^{(-)^l}$ 最後の核子が (nlj) -軌道を占有

例えば、 $Z = 20$ である Ca の同位元素の実験値は、

N	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
スピン	0	7/2	0	7/2	0	7/2	0	7/2	0	3/2	0

である。まず、偶々核となる N が偶数の場合はスピンは 0 であり、上記の規則通りである。次に ^{41}Ca は 21 個の中性を持つ。21 番目の中性子は図 2 から分かるように $1f_{7/2}$ 軌道を占めるので ^{41}Ca のスピンは $7/2$ と予想され実験値と一致する。 $1f_{7/2}$ 軌道には $2j + 1 = 8$ 個まで中性子が入ることができるので、 N が奇数の ^{41}Ca から ^{47}Ca までのスピンは $7/2$ である。 ^{49}Ca の 29 番目の中性子は、 $1f_{7/2}$ が既に満たされているので $2p_{3/2}$ に入る。その結果スピンは $3/2$ と予想され実験値と一致する。

このように、スピンに関する規則は閉殻核近傍の核では良く成り立っているが、閉殻核から離れるとかなり破れている。このことは、対相関以外の無視した残留相互作用の重要性を示唆している。

10.5 奇核の磁気モーメント

上記のように奇核の基底状態は 0 でない角運動量をもっており、その結果、有限の磁気モーメントが観測される。磁気モーメントは、角運動量の方向に向いた固有状態に対するその方向の磁気双極子演算子の期待値である。磁気双極子演算子は、

$$\boldsymbol{\mu} = (g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}) \mu_N \equiv g_j \mathbf{j} \mu_N \tag{34}$$

であり、

$$g_l = \begin{cases} 0 & \text{中性子} \\ 1 & \text{陽子} \end{cases} \quad g_s = \begin{cases} g_n = -3.82 & \text{中性子} \\ g_p = +5.58 & \text{陽子} \end{cases} \tag{35}$$

である。

奇数陽子核					奇数中性子核				
原子核	J^π	軌道	シュミット値	実験値	原子核	J^π	軌道	シュミット値	実験値
$^{17}_9\text{F}$	$\frac{5}{2}^+$	$d_{5/2}$	4.79	4.72	$^{17}_8\text{O}$	$\frac{5}{2}^+$	$d_{5/2}$	-1.91	-1.89
$^{39}_{19}\text{K}$	$\frac{3}{2}^+$	$d_{3/2}$	0.12	0.39	$^{39}_{20}\text{Ca}$	$\frac{3}{2}^+$	$d_{3/2}$	1.15	1.02
$^{41}_{21}\text{Sc}$	$\frac{7}{2}^-$	$f_{7/2}$	5.79	5.42	$^{41}_{20}\text{Ca}$	$\frac{7}{2}^-$	$f_{7/2}$	-1.91	-1.59
$^{209}_{83}\text{Bi}$	$\frac{9}{2}^-$	$h_{9/2}$	2.62	4.08	$^{209}_{82}\text{Pb}$	$\frac{9}{2}^+$	$g_{9/2}$	-1.91	-1.37

表 1: 奇数 Z 核 (左) と奇数 N 核 (右) の磁気モーメントのシュミット値と実験値の比較。

0^+ 核子対の寄与は 0 であるので、最後の核子が占有している軌道を (ljm) 、状態を $|ljm\rangle$ とすると、磁気モーメントは $m = j$ として、

$$\mu = \langle ljj | \mu_z | ljj \rangle \quad (36)$$

である。3 章で見たように、合成基底 $|ljm\rangle$ は軌道角運動量部分 $|l, m \pm \frac{1}{2}\rangle$ とスピン角運動量部分 $|\pm\rangle$ を用いて、

$$|ljm\rangle = \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |+\rangle + \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |-\rangle \quad (37)$$

と表される。したがって、 $m = j$ として $|ljj\rangle$ は、

$$|ljj\rangle = \pm \sqrt{\frac{l \pm j + \frac{1}{2}}{2l+1}} |l, j - \frac{1}{2}\rangle \otimes |+\rangle + \sqrt{\frac{l \mp j + \frac{1}{2}}{2l+1}} |l, j + \frac{1}{2}\rangle \otimes |-\rangle \quad (38)$$

である。式 (36) から、

$$\mu = \frac{l \pm j + \frac{1}{2}}{2l+1} \langle + | \langle l, j - \frac{1}{2} | \mu_z | l, j - \frac{1}{2} \rangle | + \rangle + \frac{l \mp j + \frac{1}{2}}{2l+1} \langle - | \langle l, j + \frac{1}{2} | \mu_z | l, j + \frac{1}{2} \rangle | - \rangle \quad (39)$$

であるが、

$$\mu_z = \mu_N (g_l l_z + g_s s_z), \quad l_z |lm\rangle = m |lm\rangle, \quad s_z |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm\rangle \quad (40)$$

であるので、

$$\mu_z |lm\rangle |\pm\rangle = \mu_N \left(g_l m \pm \frac{1}{2} g_s \right) |lm\rangle |\pm\rangle \quad (41)$$

である。したがって、

$$\mu = \frac{l \pm j + \frac{1}{2}}{2l+1} \mu_N \left(g_l (j - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} g_s \right) + \frac{l \mp j + \frac{1}{2}}{2l+1} \mu_N \left(g_l (j + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} g_s \right) \quad (42)$$

が分かる。この式で与えられる μ/μ_N をシュミット値 (Schmidt value) という。閉殻核近傍の奇核に対してシュミット値と実験値 μ/μ_N を比較すると表 1 のようになる。シュミット値は実験値をかなりよく再現することが分かる。

より一般的に、奇数陽子核と奇数中性子核の磁気モーメントをシュミット値と比較したものが、図 5 と図 6 である。シュミット値を結んだ線がシュミット線として表されている。閉殻近傍にない一般の原子核では、実験値は 2 本のシュミット線の間にあることが分かる。

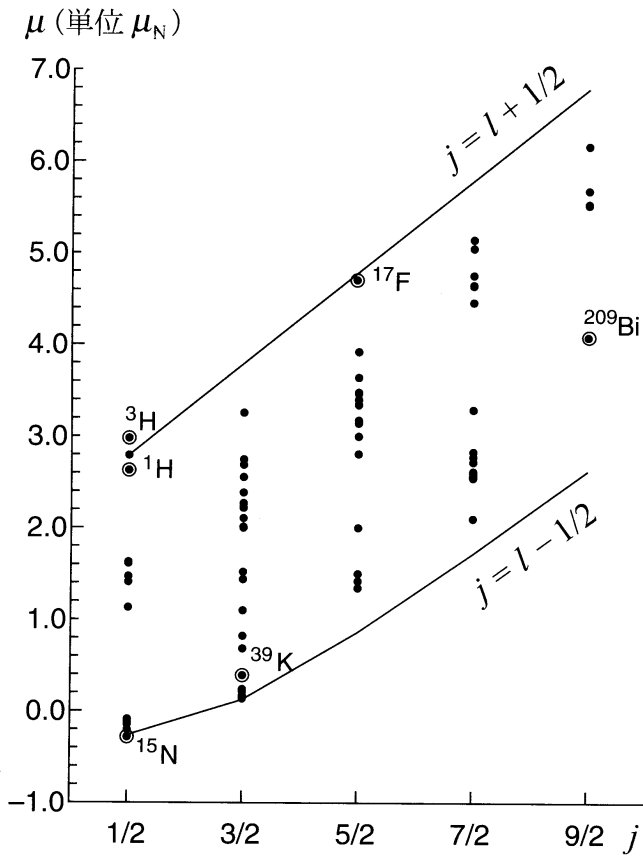


図5: 奇数陽子核 (中性子数は偶数) の主として基底状態の磁気モーメント。単位は核磁子 μ_N 。各黒丸が1個の原子核を示し、2本の実線がシュミット線を表す。

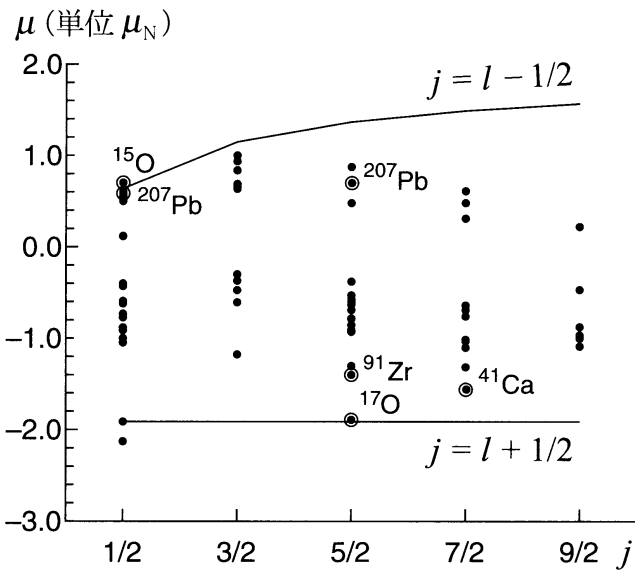


図6: 奇数中性子核 (陽子数は偶数) の主として基底状態の磁気モーメント。単位は核磁子 μ_N 。各黒丸が1個の原子核を示し、2本の実線がシュミット線を表す。

1/r 型:水素型原子の場合の電子準位の閉殻と実際の閉殻

閉殻が現れる例としてよく知られているのは原子の場合である。純粋なクーロンポテンシャル (1/r 型) の場合、エネルギー準位は、

$$\epsilon_n \propto \frac{1}{n^2}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (43)$$

である。この場合は、

$$n = n_r + l + 1, \quad (n_r, l = 0, 1, 2, \dots) \quad (44)$$

であり、軌道角運動量 l に対して磁気量子数が $(2l + 1)$ 重に縮退している。この時、縮退度は、

$$g(n) = \sum_{n_r+l+1=n} (2l + 1) = n^2 \quad (45)$$

となる。従って、 $1 \leq n \leq N_C$ まで完全に詰めた閉殻数は、

$$[e]_{\text{閉殻数}} = \underbrace{2}_{\text{スピン自由度}} \cdot \sum_{n=1}^{N_C} g(n) = \frac{1}{3} N_C (N_C + 1) (2N_C + 1) \quad (46)$$

となる。これから、 N_C と縮退度、閉殻数の関係は、

N_C	1	2	3	4	5	6
$g(n)$	1	4	9	16	25	36
閉殻数	2	10	28	60	110	182

となる。

クーロンポテンシャルの場合、調和振動子の場合と異なり n が増えるに従って準位間隔が狭くなる。従って、エネルギー準位が少しずれるだけで閉殻の位置が変化し得る。実際、原子の場合は周りに存在する他の電子からのクーロン力を受けるため、純粋なクーロンポテンシャルからのずれが存在する。このために、エネルギー準位に対して軌道角運動量 l に対する縮退が解ける。この時、より中心に近い (引力が強くなる) l の小さな軌道のエネルギーが下がる。以上から上記で与えた閉殻は実現せず、実際の原子の閉核はよく知られた以下のようなものになる。

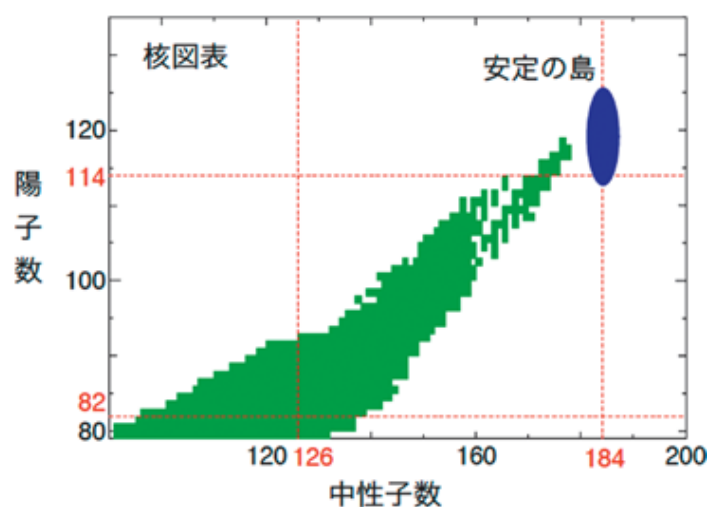
軌道名	K	L	M	N	O	P
$g(n)$	1	4	4	9	9	16
閉殻数	2	10	18	36	54	86
元素	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn

コラム：究極の超重原子核—安定の島をめざして—（「物理学 70 の不思議」より）

天然に大量に存在する最大の原子番号の原子核は、92 番のウランである。それよりも大きな原子番号をもつ原子核（重元素、超重元素^a）は人工的につくり出せることができるが、いったいいくつの原子番号の原子核までが存在するのだろうか？

原子核は陽子と中性子からなり、それらは核力で強く結合しているが、陽子数が増えていくと電気的な反発力が大きくなるため、原子核は崩壊しやすくなる。原子番号が大きくなるにつれ、原子核は不安定になっていき、ついには存在しなくなるはずである。現在、118 番までの原子核が見つかったが、119 番以上の原子核は見つかるのだろうか？

鍵となるのは原子核の安定性であり、核力とクーロン力のバランスだけでなく、核力から導かれる陽子数や中性子数に現れる魔法数も重要になる。電子の魔法数のように、原子核も 1 粒子軌道が満杯になると安定になる。安定核における、これまでにわかっている陽子の魔法数は $z = 2, 8, \dots, 50, 82$ であり、中性子の魔法数は $N = 2, 8, \dots, 82, 126$ である。とくに、両方とも魔法数（二重魔法数）になる原子核、たとえば質量数 208 の鉛 ($Z = 82, N = 126$) は非常に安定である。単純に考えると、次の魔法数は $Z = 114, N = 184$ と予言できるので^b、原子番号 114 で質量数 298 の二重魔法数の原子核は、相対的に安定で半減期が長い可能性がある。変形の効果を入れた詳しい計算によると、この近くにはいくつか安定な原子核の存在が予想されている。横軸を中性子数、縦軸を陽子数として原子核の存在を表す核図表でみると、これらの原子核は既知の核種が分布する領域から離れたところに飛び地のようにかたまっていて、「安定の島」とよばれている。この安定の島の発見をめざして、この領域にあるまだ見ぬ究極の超重原子核を人工的につくり出す挑戦が続いている。



^a一般に、原子番号が 101 番 (Md: メンデレヴィウム) 以降の元素を「重元素」と呼び、原子番号が 104 番 (Rf: ラザホージウム) 以降の元素を「超重元素」と呼ぶ

^b通常の魔法数「2, 8, 20, 28, 50, 82, 126」は安定核に対するものである。重元素や超重元素は不安定核であるが、この場合、陽子数 114 や 120 も魔法数となることが示唆されている。しかしながら、理論モデルの依存性もあり確定はしていない

演習問題 10

1. 殻模型に基づいて、次の原子核の基底状態のスピン・パリティの値を答えよ。

$${}_{10}^{20}\text{Ne}, \quad {}_{13}^{27}\text{Al}, \quad {}_{21}^{41}\text{Sc} \quad (47)$$

計算・メモ用余白