

## 11 原子核の変形と集団運動

本章では、原子核の変形と、集団運動に対応する回転励起について概観する。

### 11.1 電気四重極モーメント

前章で見たように、閉殻近傍の奇核の磁気モーメントは、殻模型から期待されるシュミット値で良く再現される。しかしながら、閉殻近傍にない一般の原子核では、実験値はシュミット値から有意にズレる(2本のシュミット線の間にある)。原子核の形状に関する電気四重極モーメント(以下四重極モーメント)も、以下の通り同様の傾向を示す。

まず四重極演算子は、

$$Q = 2z^2 - (x^2 + y^2) = r^2(3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \phi) \quad (1)$$

である。四重極モーメント  $Q$  は、その  $m = j$  の状態に対する期待値、

$$Q = \langle jm = j | r^2(3\cos^2\theta - 1) | jm = j \rangle = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle jj | r^2 Y_{20}(\theta, \phi) | jj \rangle \quad (2)$$

で定義される。定義から、球形であれば  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$  より  $Q = 0$  であるのに対して、量子化軸である  $z$  軸方向に伸びていけば  $Q > 0$  であり、このような形状を**プロレート形**または**葉巻形**と呼ぶ。逆に量子化軸である  $z$  軸と垂直な  $xy$  面方向に膨れていけば  $Q < 0$  であり、このような形状を**オブレート形**または**パンケーキ形**と呼ぶ。

球対称の閉殻の外を1個の陽子が回っているとして、四重極モーメント  $Q^+$  を計算してみる(添え字の“+”は閉殻に陽子が1個加わっていることを表す)。陽子が占有している軌道を  $(jm)$ 、状態を  $|jm\rangle$  とすると、以前見たように、

$$|jm\rangle = R_{nlj}(r) \sum_{m_s} \langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \rangle Y_{lm_l}(\theta, \phi) | \frac{1}{2} m_s \rangle \quad (3)$$

であるので、式(2)に代入して積分を実行すると(計算の詳細は章末参照)、

$$Q^+ = -\frac{2j-1}{2j+2} \langle r^2 \rangle \quad (4)$$

となる。ここで、 $\langle r^2 \rangle$  は  $r^2$  の期待値で、

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^4 \{R_{nlj}(r)\}^2 dr \quad (5)$$

で与えられる。

$\langle r^2 \rangle$  のおおよその値を得るために、動径波動関数  $R_{nlj}(r)$  は半径  $R = r_0 A^{1/3}$  の球内で一様で、球外では0と仮定すると、

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^R r^4 dr}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} r_0^2 A^{2/3} \quad (6)$$

であるので、

$$Q^+ = -\frac{2j-1}{2j+2} \frac{3}{5} r_0^2 A^{2/3} \quad (7)$$

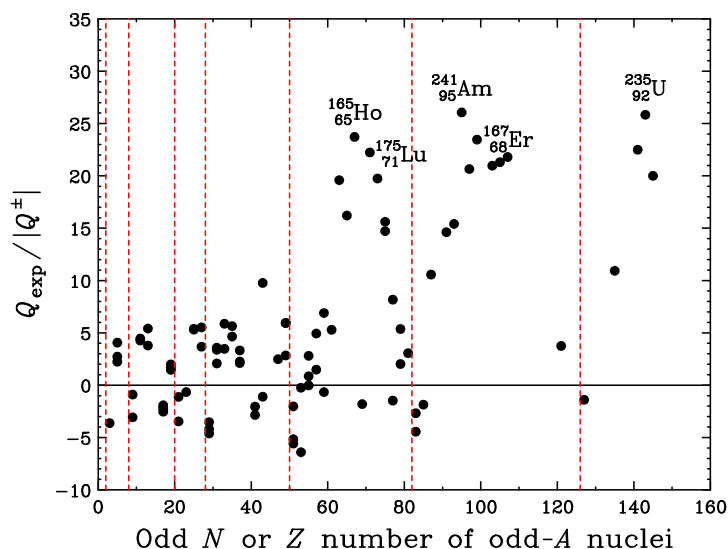


図1: 奇核に対する四重極モーメントの実験値  $Q_{\text{exp}}$  と式(8)による計算値の比。縦の破線は魔法数を示す。魔法数から離れると、実験値は計算値から大きく外れることが分かる。また、実験値の符号から原子核はプロレート形(葉巻形)に変形していることが分かる。

を得る。

ここまででは閉殻の外を1個の陽子が回っている場合を考えてきたが、今度は閉殻から1個の陽子を取り除いた状態(陽子空孔状態と呼ぶ)を考え、その四重極モーメントを  $Q^-$  とおく(添え字の“-”は閉殻から陽子を1個取り除いたことを表す)。1個の陽子を加えると球対称な閉殻になり、四重極モーメントが0になるので、

$$Q^- + Q^+ = 0 \quad \rightarrow \quad Q^- = -Q^+ = +\frac{2j-1}{2j+2} \frac{3}{5} r_0^2 A^{2/3} \quad (8)$$

を得る。

図1に、奇核に対して四重極モーメントの実験値  $Q_{\text{exp}}$  と計算値  $|Q^\pm|$  の比をいろいろな原子核に対して計算した結果を示す<sup>1</sup>。  $^{175}_{71}\text{Lu}$ (ルテニウム)を例にとると、  $1g_{7/2}$  の陽子空孔状態と考えられるので、

$$Q^- = +15.7 \text{ fm}^2 \quad (9)$$

となる。一方、実験値は  $Q_{\text{exp}} = +349 \text{ fm}^2$  であり、単純な予想の約22倍となり、陽子の単一粒子(単一空孔)模型では大きな実験値を説明出来ない。

## 11.2 原子核の変形

上記の通り、閉殻から離れた原子核の持つ大きな四重極モーメントは、陽子の単一粒子模型(ただ1個の陽子(または陽子の空孔)が四重極モーメントに関与する模型)では説明出来ない。ここで、四重極モーメントの定義に立ち戻ると、演算子は原子核の球形からのズレに対応し、積分は原子核全体(=全ての核子)に対してであるので、

原子核が球形ではなく変形していれば、球形からズレた部分の陽子「全て」が四重極モーメントに寄与するので、陽子の「単一」粒子模型の数十倍程度の値になり得る

ことが予想される。以下、図2に示すように、長軸の周りに回転した回転楕円体に変形した原子核で、どのくらいの数の陽子が四重極モーメントに寄与するか簡単に見積もってみる。

<sup>1</sup>全ての原子核を“閉殻  $\pm 1$ ”とみなして計算している。

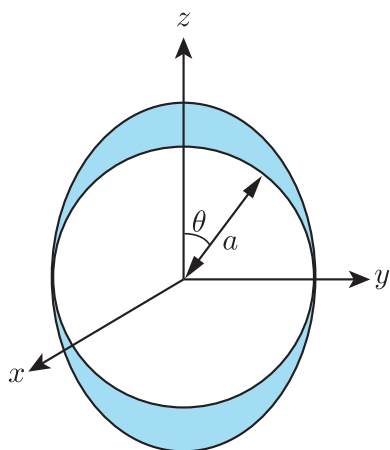


図2: 四重極 (回転楕円体) 変形核の概念図。z-軸のまわりで回転対称 (軸対称) である。色をつけた部分が四重極モーメントに寄与する。

回転楕円体であるので、核表面は  $\beta$  を**変形パラメータ**として、

$$R(\theta, \phi) = R_0[1 + \beta Y_{20}(\theta, \phi)] \quad (10)$$

と表される。ここで球面調和関数は、

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (11)$$

であるので、楕円は、

$$\text{短軸} : R_0 \left(1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\beta\right) \quad \text{長軸} : R_0 \left(1 + 2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\beta\right) \quad (12)$$

である。この**変形核 (deformed nucleus)** の四重極モーメントは、電荷密度を  $\rho_e(\frac{4\pi}{3}\rho_e R_0^3 = Z)$  として、

$$\begin{aligned} Q &= \rho_e \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) d\mathbf{r} = \int_0^{R(\theta, \phi)} \int_{4\pi} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) r^2 dr d\Omega \\ &= \rho_e \frac{1}{5} R_0^5 \int_{4\pi} [1 + \beta Y_{20}(\theta, \phi)]^5 \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{20}(\theta, \phi) d\Omega \quad (\because Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3 \cos^2 \theta - 1)) \\ &= \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z R_0^2 \beta + O(\beta^2) \quad (\because \int_{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

例えば  $^{178}\text{Hf}$  (ハフニウム) では、四重極モーメントの実験値は、

$$Q_{\text{Hf}} = 707 \text{ fm}^2 \quad (14)$$

である<sup>2</sup>。この値から  $\beta$  を求めると、

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Hf}} &= \frac{Q_{\text{Hf}} \sqrt{5\pi}}{Z R_0^2 \cdot 3} = \frac{707 \text{ fm}^2}{\frac{3}{\sqrt{5\pi}} \times 72 \times (1.12 \cdot 178^{1/3})^2} \\ &\approx 0.33 \end{aligned} \quad (15)$$

と求められる。また、近傍の核では、 $\beta=0.25-0.35$  である。

<sup>2</sup>実験値そのものの値は「 $-202 \text{ fm}^2$ 」であるが、これは実験室系で回転していることに伴う因子  $-\frac{2}{7}$  が掛かったものである。ここで必要な値は原子核静止系 (固有座標系) での値であるので、この因子を補正している。

図2に示す四重極変形核の概念図において、四重極モーメントに寄与するのは色をつけた部分である。四重極モーメントに寄与しない内部の球(白抜き)の半径は、

$$a = R_0 \left[ 1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right] \quad (16)$$

であるので、寄与する影の部分の体積は、

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4\pi}{3} R_0^3 \left[ 1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right]^2 \left[ 1 + 2\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right] - \underbrace{\frac{4\pi}{3} R_0^3 \left[ 1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right]^3}_{\frac{4\pi}{3} a^3} \\ &= \sqrt{5\pi} R_0^3 \beta + \mathcal{O}(\beta^2) \end{aligned} \quad (17)$$

である。ゆえに、四重極モーメントに寄与する部分の割合は、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\sqrt{5\pi} R_0^3 \beta}{\frac{4\pi}{3} R_0^3} = \underbrace{\frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}}}_{=0.946} \beta \\ &\approx \beta \end{aligned} \quad (18)$$

である。

従って、 $\beta=0.25-0.35$ であるということは、核全体の陽子数の約25-35%が四重極モーメントに寄与する事になる。例えば上に挙げた $^{178}_{72}\text{Hf}$ の場合には、四重極モーメントに寄与する陽子数は約24個になる。以下で見る原子核の回転励起は、このような多数の核子のまとまった運動(**集団運動**)として理解される。

### 11.3 原子核の回転励起

変形した原子核においては、古典的な回転運動に対応する励起(回転励起)が起こる。ここでは簡単のため偶々核(基底状態のスピンは0)を考える。回転エネルギーは、古典的なコマとの類推で、角運動量を $I$ 、慣性能率を $\mathcal{J}$ とすると、

$$E = \frac{I^2}{2\mathcal{J}} \quad (19)$$

と書ける。量子力学的には、

$$E(I) = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}} \quad (I = 0, 2, 4, 6, \dots) \quad (20)$$

となる。詳細は省略するが、変形が軸対称な場合、角運動量 $I$ は偶数に限られる。回転励起の第一励起状態である $2^+$ 状態は、核子対を壊してできる $2^+$ の励起状態(1~2 MeV程度)よりも低いエネルギー(< 100 keV)に現れる(図3参照)。

回転励起に対応するエネルギー単位は図4左に示す特徴的な構造を示す。実際、式(20)からエネルギーの比を計算すると、慣性能率によらず、

$$\frac{E(4)}{E(2)} = \frac{10}{3} = 3.33, \quad \frac{E(6)}{E(2)} = 7, \quad \frac{E(8)}{E(2)} = 12, \quad \frac{E(10)}{E(2)} = \frac{55}{3} = 18.33, \quad \frac{E(12)}{E(2)} = 26, \dots \quad (21)$$

となることが予想されるが、実際、図5に示す通り原子核によらず成立していることが分かる。

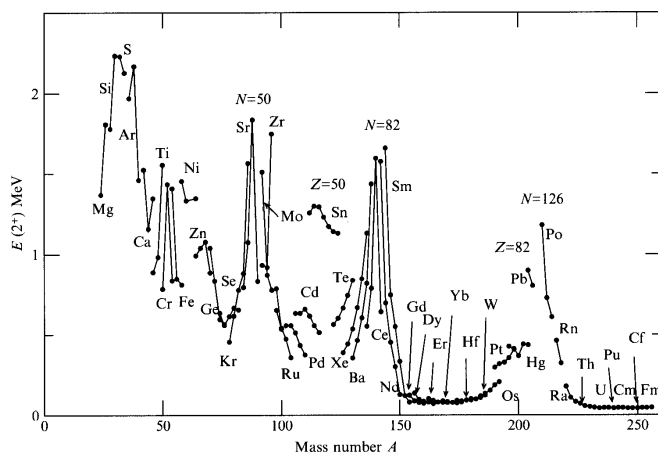


図 3: 偶々核の第一  $2^+$  状態のエネルギーの質量数依存性<sup>a</sup>。  $A = 150 \sim 190$  と  $A > 220$  の領域のエネルギーが低く、回転励起状態であることを示している。

<sup>a</sup>出典: J. S. Lilley 著「Nuclear Physics—Principles and Applications—」(John Wiley & Sons, Ltd).

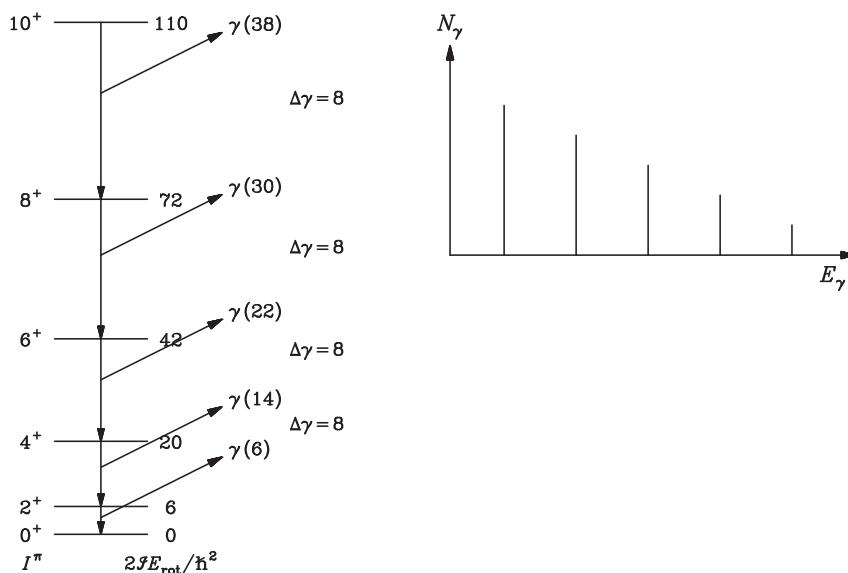


図 4: 左は原子核の回転励起準位とガンマ線放出による脱励起を模式的に示したもの。右は観測されるガンマ線のエネルギースペクトルである。観測されるガンマ線のピークは回転励起の場合、等間隔になる。

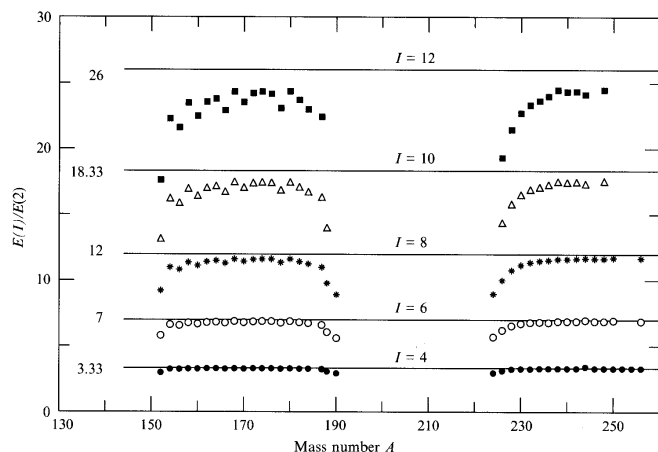


図 5: 偶々核の回転励起のエネルギー比  $E(I)/E(2)$ <sup>a</sup>。質量数  $A = 150 \sim 190$  と  $A \geq 224$  の実験値を示している。実線は式 (20) に基づく予想である。

<sup>a</sup>出典: J. S. Lilley 著「Nuclear Physics—Principles and Applications—」(John Wiley & Sons, Ltd).

原子核の回転励起状態は原子核反応により励起可能であり、各準位はそれぞれすぐ下の準位へガンマ線を放出して遷移する。例えば、図4左に示す  $10^+$  の準位の下には、 $0^+ \sim 8^+$  の5つの状態があるが、角運動量の変化が少ない遷移の方が起こりやすいため、

$$10^+ \rightarrow 8^+ \rightarrow 6^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+ \quad (22)$$

と順々にガンマ線を放出して遷移する。この時、放出されるガンマ線のエネルギー  $E_\gamma$  は、

$$E_\gamma(I+2 \rightarrow I) = E(I+2) - E(I) = \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}}(2I+3) \quad (23)$$

であるので、(ゲルマニウム検出器等のガンマ線検出器で測定した)ガンマ線のエネルギースペクトル(図4右参照)での、ガンマ線のピーク間の間隔は、

$$E_\gamma(I+4 \rightarrow I+2) - E_\gamma(I+2 \rightarrow I) = 4\frac{\hbar}{\mathcal{J}} \quad (24)$$

と等間隔になる。この等間隔のガンマ線スペクトルは、原子核の変形と回転励起を決定付ける特徴的スペクトルである。

## 11.4 慣性モーメント

慣性モーメントの大きさ  $\mathcal{J}$  と変形の大きさ  $\beta$  の間には、その物質の性質により一定の関係が成り立つ。一つの極限は完全な剛体であり、

$$\mathcal{J}_{\text{rig}} = \frac{2}{5} \underbrace{M}_{Am_N} R_0^2 \left[ 1 + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta + \mathcal{O}(\beta^2) \right] \quad (25)$$

である。もう一つの極限として、超流動ヘリウムのような非圧縮性渦なし流体がある。この場合には、

$$\mathcal{J}_{\text{irr}} = \frac{9}{8\pi} \underbrace{M}_{Am_N} R_0^2 \beta^2 \quad (26)$$

となる。

$^{168}\text{Er}$  を例にとると、四重極モーメントの測定から、

$$\beta = 0.35 \quad (27)$$

である。回転励起状態からのガンマ線のエネルギーは、

$$E_\gamma(2^+ \rightarrow 0^+) = 80 \text{ keV} \quad (28)$$

であるので、

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{rig}}/\hbar^2 &= 79 \text{ MeV}^{-1} \\ \mathcal{J}_{\text{exp}}/\hbar^2 &= 37 \text{ MeV}^{-1} \\ \mathcal{J}_{\text{irr}}/\hbar^2 &= 7.8 \text{ MeV}^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

である。

その他の原子核に対しても、一般に、

$$\mathcal{J}_{\text{irr}} < \mathcal{J}_{\text{exp}} < \mathcal{J}_{\text{rig}} \quad (30)$$

であり、実験値は剛体と超流動体の中間になっている。このことは、定性的には原子核が超流動体と剛体の混合体であると考えることによって理解できる。

こうして得られた原子核の描像は、対相互作用によって  $0^+$  状態にスピンを組んだ  $0^+$  核子対が中心部分に超流動体を形成し、対を形成しない外側の核子が変形に寄与するというものである。

### ■ 1 個の陽子の四重極モーメント $Q^+$ の計算

陽子が占有している軌道を  $(jm)$ 、状態を  $|jm\rangle$  とする。クレブシュ・ゴールドン係数の選択則  $m_l + m_s = m$  から

$$|jm\rangle = R_{nlj}(r) \sum_{m_s} \langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \rangle Y_{lm_l} | \frac{1}{2} m_s \rangle = R_{nlj}(r) \sum_{m_s} \langle lm - m_s \frac{1}{2} m_s | jm \rangle Y_{lm - m_s} | \frac{1}{2} m_s \rangle \quad (31)$$

である。従って状態  $|jj\rangle$  は、

$$|jj\rangle = R_{nlj}(r) \sum_{m_s} \langle lj - m_s \frac{1}{2} m_s | jj \rangle Y_{lj - m_s} | \frac{1}{2} m_s \rangle \quad (32)$$

である。

四重極モーメント  $Q^+$  は、この状態に対する期待値であるので、

$$\begin{aligned} Q^+ &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle jj | r^2 Y_{20} | jj \rangle \\ &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle r^2 \rangle \sum_{m_s} |\langle lj - m_s \frac{1}{2} m_s | jj \rangle|^2 \int_{4\pi} Y_{lj - m_s}^* Y_{20} Y_{lj - m_s} d\Omega \end{aligned} \quad (33)$$

である。

球面調和関数に関する積分は、積分公式、

$$\int_{4\pi} Y_{lm}^* Y_{\lambda\mu} Y_{lm} d\Omega = \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{4\pi}} \langle lm \lambda \mu | lm \rangle \langle l0 \lambda 0 | l0 \rangle \quad (34)$$

を用いると、

$$\int_{4\pi} Y_{lj - m_s}^* Y_{20} Y_{lj - m_s} d\Omega = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \langle lj - m_s 20 | lj - m_s \rangle \langle l0 20 | l0 \rangle \quad (35)$$

である。したがって、 $Q^+$  は、

$$Q^+ = 2 \langle r^2 \rangle \langle l0 20 | l0 \rangle \sum_{m_s} |\langle lj - m_s \frac{1}{2} m_s | jj \rangle|^2 \langle lj - m_s 20 | lj - m_s \rangle \quad (36)$$

となる。

ここで、 $j$  は  $j + \frac{1}{2}$  と  $j = l - \frac{1}{2}$  の 2 通りの場合があり、それぞれ別に、対応するクレブシュ・ゴールドン係数を計算する必要がある。まず、 $\langle l0 20 | l0 \rangle$  は共通で、公式から<sup>3</sup>、

$$\langle l0 20 | l0 \rangle = -\frac{l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(2l+3)}} \quad (37)$$

である。次に、 $\langle lj - m_s \frac{1}{2} m_s | jj \rangle$  と  $\langle lj - m_s 20 | lj - m_s \rangle$  についても、 $m_s \pm \frac{1}{2}$  それぞれについて公式から次の表の値を得る。

<sup>3</sup>参考文献：A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, 1974).

		$j = l + \frac{1}{2}$	$j = l - \frac{1}{2}$
$\langle lj - m_s \frac{1}{2} m_s   jj \rangle$	$\langle lj - \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}   jj \rangle$	1	$\frac{1}{\sqrt{2l+1}}$
	$\langle lj + \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}   jj \rangle$	0	$\sqrt{\frac{2l}{2l+1}}$
$\langle lj - m_s 20   lj - m_s \rangle$	$\langle lj - \frac{1}{2} 20   lj - \frac{1}{2} \rangle$	$\frac{l(2l-1)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(2l+3)}}$	$\frac{(2l-1)(l-3)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(2l+3)}}$
	$\langle lj + \frac{1}{2} 20   lj + \frac{1}{2} \rangle$	$\frac{(2l+3)(l+1)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(2l+3)}}$	$\frac{l(2l-1)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(2l+3)}}$

これらのクレブシュ・ゴールドン係数を用いて  $Q^+$  を計算すると、

$$Q^+ = \begin{cases} -\frac{2l}{2l+3} \langle r^2 \rangle & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{2(l-1)}{2l+1} \langle r^2 \rangle & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (38)$$

を得る。得られた式は  $j$  に対する表記にすると同じになり、

$$Q^+ = -\frac{2j-1}{2j+2} \langle r^2 \rangle \quad (39)$$

となる。

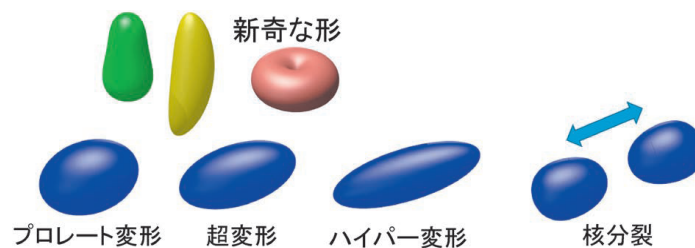
**コラム：原子核の形とダイナミクス**（「物理学 70 の不思議」より）

原子核は、陽子と中性子からなる孤立した液滴のようなもので、表面があり振動したりする。古典的な液滴なら球形になるだけだが、原子核には超流動性があり、さまざまな「形」をとる。原子核のなかではたくさんの陽子や中性子が高密度に密集しているにもかかわらず、原子と似た単一粒子軌道、閉殻構造および魔法数という概念が成り立ち、それらが形の形成の基礎となっている。

一般に、陽子数または中性子数が魔法数に近ければ、基底状態は球形になる。魔法数から離れると1粒子準位密度が上がり、回転対称性が自発的に破れ、原子核は変形する。多くの場合はプロレート型（ラグビーボール型）に変形し、回転する。この原子核の形は1つに限るわけではなく、複数の形が同時に共存しうる。球形や変形した状態と、そのうえにできるさまざまな準粒子励起状態が競合した結果、原子核の量子状態が決まり、電磁遷移などの原子核の性質を特徴づける。

たとえば、形の競合の妙のために、励起状態にもかかわらず長寿命になることがあり、それが元素合成のあり方を左右しうる。また、新奇な形として、バナナ型や正四面体、トーラス型まで理論的に予言されており、それが生み出すメカニズムの研究が精力的に進められている。近年研究が進みつつある不安定核では、単一粒子軌道の構造を決める魔法数さえ変化し、予期できない複雑な形やその競合が現れうる。原子核の量子状態を不安定核まで含め、統一的に核力から第一原理的に導き、新奇な形とそのダイナミクスを予言することは、原子核理論の大きな挑戦となっている。

ある種の原子核を高速に回転させると、長軸と短軸の比が2:1となる超変形（スーパー変形）といわれる形が現れる。さらに速く回転させると、原子核が分裂してしまう前に、長軸と短軸の比が3:1のハイパー変形になるのではないかと考えられている。このハイパー変形の探索は、未知の部分がまだ多い核分裂のダイナミクスの理解につながると期待される。



**演習問題 11**

1.  $^{172}_{72}\text{Hf}$ (ハフニウム)の基底状態および励起状態のエネルギーとスピンは下の表のようになっている。このデータを用いて、それぞれの励起状態について原子核の慣性モーメント  $\mathcal{I}$  を求めよ。また、得られた値を、原子核を剛体球と見なした場合の慣性モーメント  $\frac{2}{5}MR^2$  ( $M$  と  $R$  はそれぞれ、原子核の質量と半径である) と比較せよ。

エネルギー (MeV)	0	0.095	0.309	0.628
スピン	0	2	4	6

計算・メモ用余白