

2 原子核の大きさ

2.1 微分散乱断面積

微分散乱断面積は実験で得られる基本的測定量の1つである。その古典的定義は、

$$\text{微分散乱断面積: } \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

である。 $d\sigma$ と、 $d\Omega$ は図参照。

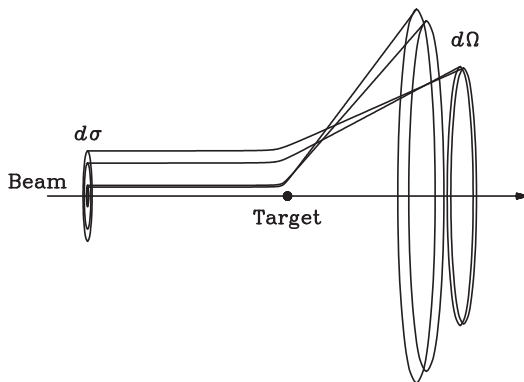


図 1: 微分散断面積の古典的定義 (描像)

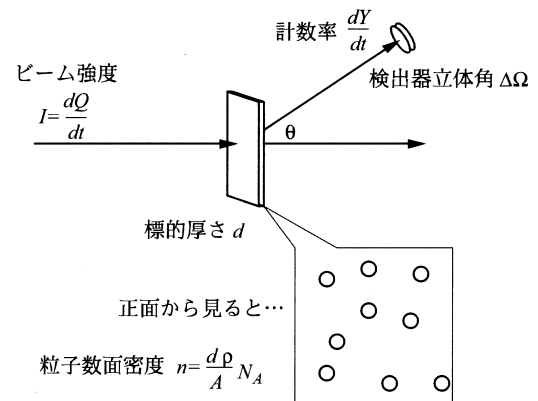


図 2: 微分散断面積の導出に必要な諸量 (セットアップ)

ここで、もし古典軌道が定義できるなら、実は断面積という間接的観測量を使う必要は無い(古典軌道が直接的観測量であるので)。

原子核のような微視的な系では、ビームは一様に広がっている為、**衝突係数 (impact parameter)** は制御不能である(ビームの大きさ(直径)は、 $\mu\text{m}-\text{mm}(10^{-6}-10^{-3} \text{ m})$ であるのに対して、原子核の大きさは $\text{fm}(10^{-15} \text{ m})$ である)。従って、断面積という量が意味を持つてくる。

今、実験条件を以下の通りとする。

$$\text{ビーム強度 } I = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{単位時間当たりの照射粒子数})$$

$$\text{計数率 } \frac{dY}{dt} \quad (\text{単位時間当たりの検出粒子数})$$

$$\text{立体角 } \Delta\Omega \quad (\text{検出器の張る立体角} \cdot \text{全空間} = 4\pi)$$

標的 質量数: A 、厚さ: d 、密度: ρ

$$\text{標的の粒子数面密度 } n = \frac{d\rho}{A} N_A \quad (\text{ビームから見た、単位面積当たりの標的粒子数})$$

すると、微分散断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{dY}{dt} \frac{1}{In\Delta\Omega} \quad (1)$$

で定義される(ただし薄い標的の極限)。

理論的には、微分散乱断面積の角度分布をうまく説明するような、原子核構造・相互作用(核力)のモデルを構築することが重要である。実験的には、モデルの妥当性を判断するために、微分散乱断面積の詳細なデータや、断面積以外の観測量(スピンに関係した量等)を得ることが重要となる。

標的の厚みが増すと、重なり合う効果を考慮する必要がある。全断面積を $\sigma \equiv \int (d\sigma/d\Omega) d\Omega$ として、ビーム強度の減衰を計算すると、

$$dI = -I \underbrace{\sigma \frac{\rho N_A}{A}}_{\equiv \text{減衰係数 } \lambda} dx \Rightarrow I(x) = I(0) \exp(-\lambda x), \quad (2)$$

となる。

2.2 量子力学における断面積の表現 (復習)

量子力学における断面積の表現として、散乱振幅やボルン近似について簡単にまとめておく。詳しくは量子力学の講義や教科書を参照のこと。

散乱振幅

全系のハミルトニアンを、

$$H = H_0 + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (3)$$

とおく。ここで、 H_0 は自由粒子 ($V(\mathbf{r}) = 0$) のハミルトニアンであり、 $V(\mathbf{r})$ は原子核が作るポテンシャルである。以下では時間に依存しないシュレディンガー方程式を考えることとし、エネルギーを、

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0 \quad (4)$$

とする。 E (および k) は任意であり、実験における入射粒子のエネルギー (波数) に対応する。

まず、平面波、

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = C \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5)$$

を考えると、これは自由粒子、

$$H_0 \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi = E \phi \quad (6)$$

の解であり、無限遠 ($V(\mathbf{r}) = 0$) から入射する粒子に対応する。 C は任意 (実際の条件に合うように選ばれる) であり、以下では簡単のため $C = 1$ とする。この平面波の流れの密度は、

$$\mathbf{j}[\phi] = -\frac{i\hbar}{2m} [\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*] = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \equiv \mathbf{v} \quad (7)$$

となる。次元は [面積・時間] $^{-1}$ であり、「単位時間・単位面積に入射する粒子数」という意味を持つ。

次に散乱波 $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ について考える。ここでは以下の漸近的境界条件、

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \underbrace{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}_{\phi(r)} + f(\theta) \underbrace{\frac{\exp(ikr)}{r}}_{\chi(r)} \quad (8)$$

を課す (図 3 参照)。第 1 項は入射と同じ平面波であり、入射した粒子がそのまま散乱されず透過波として \mathbf{k} で進行することに対応する。第 2 項は標的 (原子核) による散乱に対応し、標的を波源

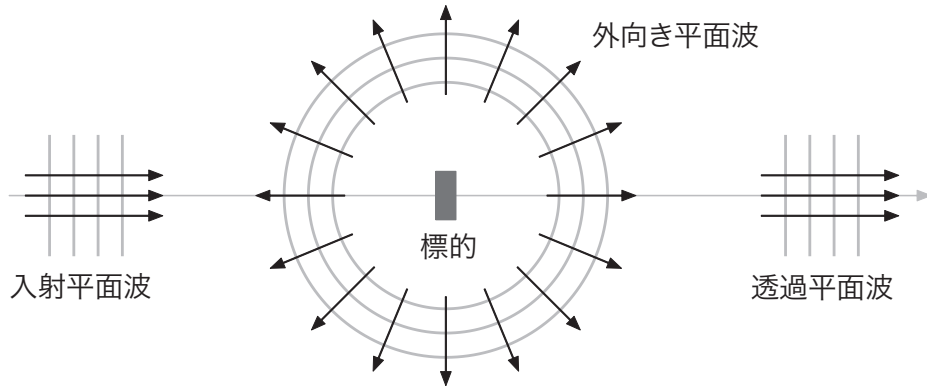


図 3: 散乱問題の境界条件

とする外向き球面波として表されている。 $f(\theta)$ は**散乱振幅**と呼ばれ、散乱に関する全ての情報が含まれる。

外向き球面波 χ の流れの密度は、 e_θ 成分等を見捨てる、

$$\begin{aligned} \mathbf{j}[\chi] \cdot \hat{\mathbf{r}} &= -\frac{i\hbar}{2m} \left[\chi^* \frac{\partial}{\partial r} \chi - \chi \frac{\partial}{\partial r} \chi^* \right] \\ &= v \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。従って、微小面積 dS (立体角: $d\Omega = dS/r^2$) に単位時間に散乱されてくる粒子数 dY/dt は、

$$\frac{dY}{dt} = \mathbf{j}[\chi] \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (10)$$

となる。以上から、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ と散乱振幅の関係は、

$$\frac{dY}{dt} = \underbrace{\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}}_{j[\phi]} \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|j[\phi]|} \frac{1}{d\Omega} \frac{dY}{dt} = |f(\theta)|^2 \quad (11)$$

であることが分かる。

光学定理

平面波は空間的に無限に広がっているが、実際の波束は k^{-1} 程度の広がりである。従って、散乱角 $\theta \neq 0^\circ$ では外向き球面波のみ考えれば良い。散乱された数 (角度は問わない) は、外向き球面波を積分すればよく、

$$\text{散乱された数} = v \int |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (12)$$

である。他方、 $\theta = 0^\circ$ では平面波と球面波が干渉し、入射平面波の流束に比べて減少する。これは「散乱された事により粒子数が減る」ことに対応しており、具体的に干渉部分を計算すると、

$$\text{減少分} = -\frac{4\pi\hbar}{m} \text{Im}f(0) \quad (13)$$

となる。

ここで確率 (粒子数) の保存から「散乱された数=減少分」であるので、

$$\underbrace{v}_{\hbar k/m} \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi\hbar}{m} \text{Im}f(0)$$

$$\therefore \text{Im}f(0) = \frac{k}{4\pi} \int |f(\theta)|^2 d\Omega$$
(14)

の関係があることが分かる。この関係を**光学定理**と呼び、確率の保存の1つの帰結である。

ボルン近似

外向き球面波 χ や散乱振幅 $f(\theta)$ を具体的に求める事を考える。解くべきシュレディンガー方程式は、

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)}_{H_0} \right] \psi = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_E \psi$$
(15)

であり、波動関数は、

$$\psi = \underbrace{\phi}_{\text{平面波}} + \underbrace{\chi}_{\text{球面波}}$$
(16)

である。ここで、 $H_0\phi = E\phi$ であるので、シュレディンガー方程式は

$$(\nabla^2 + k^2)\chi = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi$$
(17)

と表される。

ここで、

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \delta(\mathbf{r})$$
(18)

となる関数 G_0 (**グリーン関数**) が求めれば、

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', \mathbf{k}) d\mathbf{r}'$$
(19)

から χ が求まる。グリーン関数 G_0 は具体的には、

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r}$$
(20)

と求められる (量子力学の講義・教科書等参照)。

グリーン関数 G_0 を具体的に代入すると、シュレディンガー方程式の解は、

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \phi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \chi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \\ &= \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', \mathbf{k}) d\mathbf{r}' \end{aligned}$$
(21)

という積分方程式で与えられる (右辺の被積分関数が ψ を含む)。右辺第 2 項の積分は $V(\mathbf{r}')$ が 0 でない領域に限られる。したがって、 r の大きい (遠方) 領域では $r' \ll r$ が成り立ち、グリーン関数を r'/r で展開して近似することができる。グリーン関数の分子では、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' + \mathcal{O}(r'/r) \quad (22)$$

から、

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + \mathcal{O}(kr'/r) \quad (23)$$

となる。ここで、外向き球面波の波数ベクトル \mathbf{k} は \mathbf{r} と同じ方向であるので $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$ とした。一方、分母は、

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r'/r) \quad (24)$$

と近似できる。両式より、

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{k}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \quad (25)$$

となる。この式を代入することにより、

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \underbrace{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}_{\text{外向き球面波}} - \underbrace{\frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{4\pi} \int \exp[i\mathbf{k}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', \mathbf{k}) d\mathbf{r}']}_{f(\theta)} \quad (26)$$

と表されることが分かる。

この積分方程式は、方程式自身を代入することにより展開可能であり、その展開を**ボルン展開**と呼ぶ。

第 0 次ボルン近似 式 (26) の第 0 次近似の解は、右辺第 1 項のみを採る解である。

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (27)$$

第 1 次ボルン近似 第 0 次近似の解を式 (26) の右辺に代入して、第 1 次近似の解が得られる。散乱方向の波数ベクトルを $\mathbf{k}' \equiv k\hat{\mathbf{r}}$ として

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{4\pi} \int \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}') \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'] d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (28)$$

となるので、散乱振幅は、

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}') \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'] d\mathbf{r}' \quad (29)$$

となり、ポテンシャル V のフーリエ変換 (運動量移行 $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ の関数) に対応する。

グリーン関数

ここで出て来たヘルムホルツ型方程式

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (30)$$

のグリーン関数

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (31)$$

は、留数定理を用いて求めることが出来る^a。 G_0 が方程式を満たす事は以下の様に簡単に確かめる事ができる。

G_0 を極座標を用いてフーリエ変換を求めると、

$$\tilde{G}_0(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) G_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp(iqr \cos \theta) \frac{\exp(iqr)}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (32)$$

である ($q \equiv |\mathbf{q}|$)。 θ および ϕ の積分を実行して、

$$\tilde{G}_0(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2iq} \int_0^\infty [\exp\{i(q+k)r\} - \exp\{-i(q-k)r\}] dr \quad (33)$$

を得る。

r に関する積分を求めるために、常套手段として $\exp(-\lambda r)$ を掛けてから $\lambda \rightarrow 0$ とすると以下の通り \tilde{G}_0 が求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\mathbf{q}) &= -\frac{1}{2iq} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty [\exp\{i(q+k)r\} - \exp\{-i(q-k)r\}] \exp(-\lambda r) dr \\ &= -\frac{1}{2iq} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{\exp\{-\lambda + i(q+k)r\}}{-\lambda + i(q+k)} \right]_0^\infty - \left[\frac{\exp\{-\lambda + i(q-k)r\}}{-\lambda + i(q-k)} \right]_0^\infty \right\} \\ &= -\frac{1}{2iq} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{2iq}{(-\lambda + ik)^2 + q^2} \right\} \\ &= \frac{1}{k^2 - q^2} \end{aligned} \quad (34)$$

したがって、フーリエ逆変換から、

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \tilde{G}_0(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{k^2 - q^2} d\mathbf{q} \\ (\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int (-q^2 + k^2) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{k^2 - q^2} d\mathbf{q} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (35)$$

を得る。これはデルタ関数のフーリエ積分表示に等しいため、 G_0 が方程式を満たす事が分かる。

^a皆さん、一度は計算したことがあると思います。

2.3 高エネルギー電子（弾性）散乱

現在、もっとも信頼できる原子核の大きさ・(荷電) 密度分布を導出する道具。

電子及び電子散乱の特徴

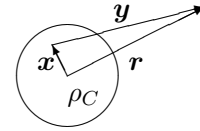
1. 電荷 $-e$ を持ち、電磁（弱）相互作用をする質量 0.511 MeV の粒子。大きさを持たない真の素粒子であり、レプトンに分類される（レプトンは強い相互作用をしない。反対にクォークは強い相互作用をする）。
2. ド・ブロイ波長 (de Broglie wave length): $\hbar c / (p_e c) \leq 1 \text{ fm} \rightarrow E_e \approx p_e c \geq \hbar c \approx 200 \text{ MeV}$ (1950 年代以降の線形加速器)

原子番号 $Z(+Ze$ の正電荷を持つ) 原子核の“電荷” 密度分布を $\rho_C(\mathbf{x}) \equiv Ze\rho(\mathbf{x})$ (原子核中心を原点とする) とすると、原子核中心から \mathbf{r} にある電子が感じるポテンシャルは、

$$V(\mathbf{r}) = -Ze^2 \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d\mathbf{x} \quad (36)$$

と表される¹。なお、密度分布関数 $\rho(\mathbf{x})$ は、

$$\int \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (37)$$



と規格化されているものとする。

ボルン近似 (Born approximation) によれば（正確にはボルン近似の 1 次まで取り扱う近似では）、散乱振幅 $f(\theta)$ (θ は電子の散乱角度) は、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= Ze^2 \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{\exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{r} \\ &= Ze^2 \frac{m}{2\pi\hbar^2} \underbrace{\int \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y})}{y} d\mathbf{y}}_{\frac{4\pi}{q^2}} \underbrace{\int \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{=F(\mathbf{q}): \text{形状因子}} \end{aligned} \quad (38)$$

と表される。ここで、

- \mathbf{k} 散乱前（始状態と呼ぶ）の電子の運動量（ベクトル）
- \mathbf{k}' 散乱後（終状態と呼ぶ）の電子の運動量（ベクトル）
- $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ 電子の運動量移行 (=原子核が受取った運動量)
- $\mathbf{y} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{x}$ 原子核内の 1 点と電子間の位置ベクトル

である。

従って、微分散乱断面積は、 $q = 2k \sin(\theta/2)$ に注意すると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \underbrace{\left(\frac{Ze^2}{4E_e} \right)^2}_{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}} \sin^{-4} \frac{\theta}{2} |F(q)|^2 \quad (39)$$

¹原子核物理学では CGS 単位系を用いるのが一般的であるので、ここでもそれに従う

である。形状因子を除く部分は、点電荷に対する散乱（ラザフォード散乱）の微分散乱断面積に等しく、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth}} = \left(\frac{Ze^2}{4E_e}\right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \quad (40)$$

である。

実際には $E_e \gg m_e c^2$ であるので、超相対論的極限 ($\gamma \gg 1$) での散乱（モット散乱）の微分散乱断面積

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{Ze^2}{2E_e}\right)^2 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \quad (41)$$

を使って、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(q)|^2 \quad (42)$$

と表される。

重要なことは、

微分散乱断面積を測定するということは、実験的に電荷分布（空間座標の関数）に対して**フーリエ変換**を行う事と等価であり、その結果、共役な運動量（移行）の関数として断面積が得られる。

である。従って式 (42) を用い、実験値 $d\sigma/d\Omega$ から形状因子 $F(q)$ を求め、そのフーリエ逆変換から密度分布 $\rho(x)$ が得られる事になる。

密度分布が球対称 ($\rho(\mathbf{x}) = \rho(x)$) な場合、

$$\begin{aligned} F(q) &= \iiint \exp(iqx \cos \theta) \rho(x) x^2 \sin \theta dx d\theta d\phi \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(x) \frac{\sin(qx)}{qx} x^2 dx \end{aligned} \quad (43)$$

と表される。

原子核を半径 R の一様電荷球 ($\rho(r) = \rho$) と近似すると、

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr &= 1 \\ \rightarrow \rho &= \frac{3}{4\pi R^3} \end{aligned} \quad (44)$$

であるので、積分は解析的に実行可能で形状因子は、

$$\begin{aligned} F(q) &\rightarrow \frac{3}{qR^3} \int_0^R \sin(qx) x dx \\ &= 3 \frac{\sin(qR) - qR \cos(qR)}{(qR)^3} \end{aligned} \quad (45)$$

と表され、実験値との比較から原子核の半径 R を得る事ができる。

現実の原子核は理想的（一様電荷球）ではなく、また実験値も理想的ではないので、以下の注意が必要。

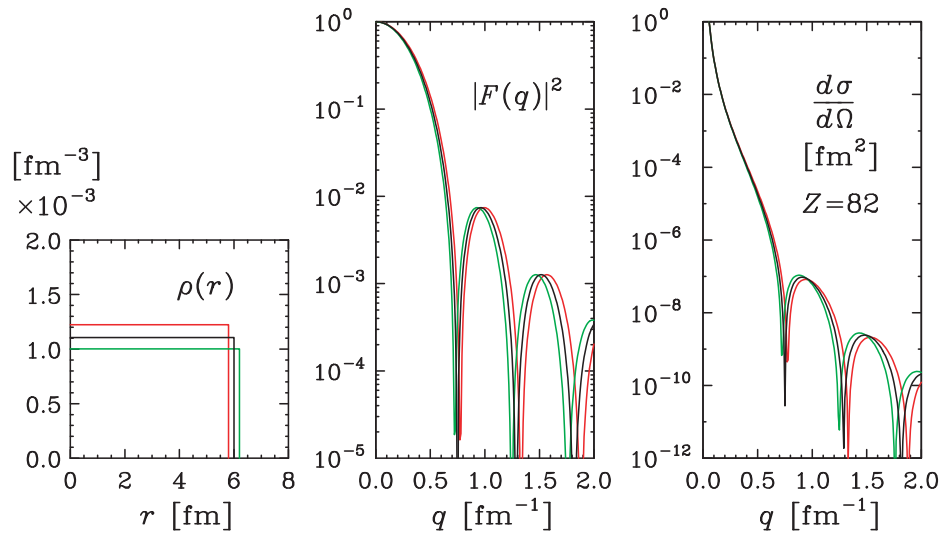


図 4: 種々の半径を持つ、一様電荷球に対する形状因子と微分断面積

原子核の表面のぼやけ 密度分布関数は原子核表面で滑らかに 0 になる (↔ 一様電荷球では階段関数的に 0 になる)。

- 山谷のずれた分布の重ね合わせ
- 谷の埋まったなだらかな角度分布となる

実際の実験値は離散的 形状因子は離散的にしか求められない

- 直接フーリエ変換はできない
- 直行関数系 (通常は球ベッセル関数) による展開

2.4 電子散乱データと密度分布関数導出例・種々の原子核の密度分布

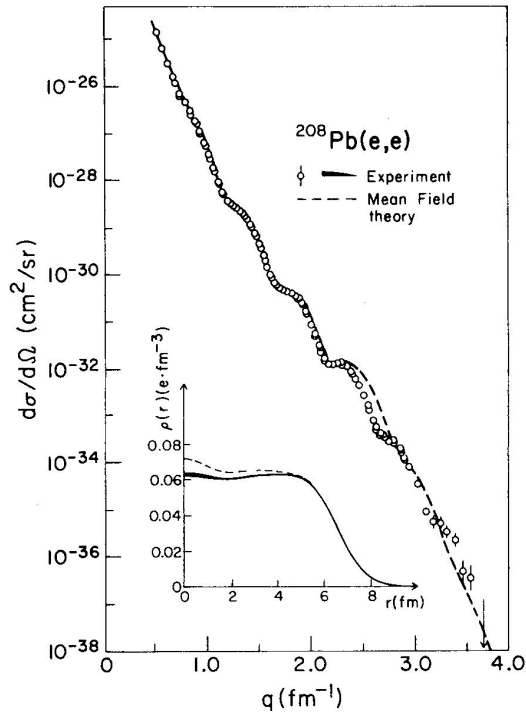


図 5: 鉛 (^{208}Pb) の電子弾性散乱 [(e, e) と書く] の微分断面積。原子核の表面のぼやけのため、谷の埋まったなだらかな角度分布になっている。Hofstadter *et al.*, $E_e = 502$ MeV @SLAC (Stanford Univ.)

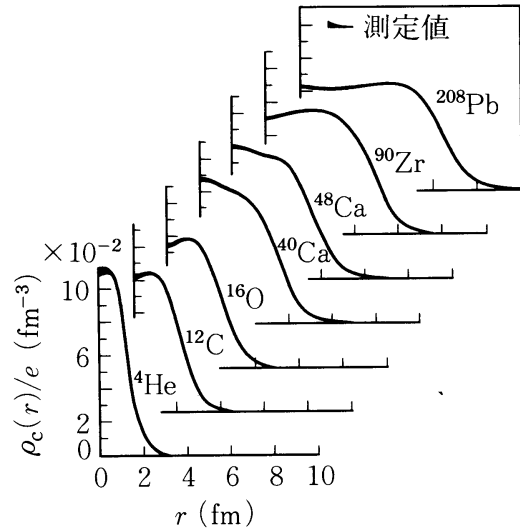
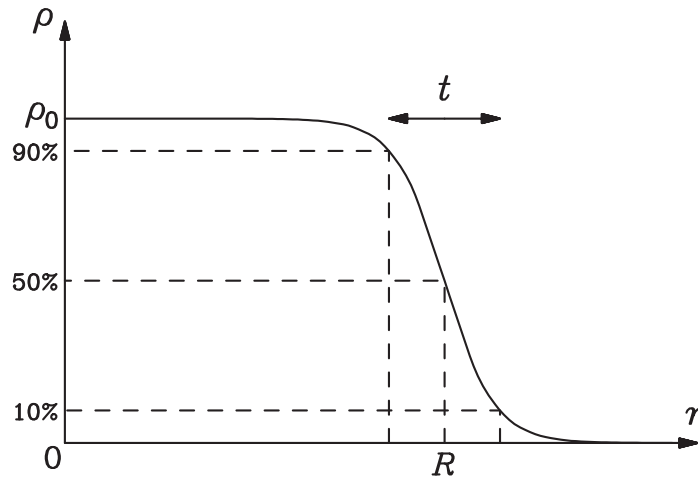


図 6: 電子弾性散乱から求められた種々の原子核の電荷密度分布。 ^4He を除き、中心部分の密度は原子核によらない。B. Foris and C.N. Papanicolas, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **37**, 133 (1987) から転載。

2.5 電子散乱による系統的研究から得られた結論

原子核の密度分布



$$\begin{aligned}
 R &= r_0 A^{1/3} \\
 r_0 &= 1.12 (1.1 \sim 1.2) \text{ fm} \\
 \rho_0 &= \frac{3}{4\pi} r_0^{-3} \\
 &= 0.17 (0.14 \sim 0.18) \text{ 核子/fm}^3 (\approx 1/6) \\
 &\rightarrow \text{密度の飽和性} \\
 &= 2.3 \sim 3.0 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3
 \end{aligned}$$

原子核が如何に高密度であるかは、通常物質密度との比較から明らかである。

元素 (物質)	密度
鉛 (Pb)	11.3 g/cm ³
イリジウム (Ir) (最大密度の元素)	22.5 g/cm ³
中性子星 (星全体が一個の原子核)	10 ¹⁴ ~ 10 ¹⁵ g/cm ³

表面の厚さ t は原子核の種類によらず、およそ 2.4 fm である。

密度分布関数

原子核の密度分布を表す模型 (関数) としては、以下のフェルミ型 (ウッズ・サクソン型) 分布関数、

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (46)$$

がよく用いられる。ここで a は表面のぼやけを表す変数であり、通常 0.5–0.6 fm の値が用いられる。

電子散乱による密度分布測定の限界

電子散乱は分厚い標的を要する為、この方法で密度分布を測定できる核種は自ずと制限される(レポート問題参照)。

その為、以下に示す研究手法が開発・確立され、密度分布が測定されている。

- 強い相互作用を伴うハドロン散乱による研究 (陽子散乱等)
- 同位体シフトを利用した研究
- 全反応断面積を利用した研究
- その他

フェルミ-ディラック積分

質量数 A とフェルミ型分布関数 $\rho(r)$ の関係は、

$$A = \int \rho(r) dr = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty \frac{r^2}{\exp\left(\frac{r-R}{a}\right) + 1} dr \quad (47)$$

で与えられる。積分は、統計力学で現れる**フェルミ-ディラック積分**

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{\frac{1}{z}e^x + 1} dx \quad (48)$$

の一種である ($z > 0$ はパラメータ、 $\Gamma(n)$ はガンマ関数)。今の場合、対応は $x \rightarrow r$ 、 $z \rightarrow e^R$ 、 $n = 3$ である。

フェルミ・ディラック積分は $z \gg 1$ ($a \ll R$ に対応) の場合はリーマンのゼータ関数 $\zeta(j)$ を用いて展開することができ、

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{(\ln z)^n}{\Gamma(n+1)} \left[1 + \sum_{j=2,4,\dots} 2n(n-1)\cdots(n+1-j) \left(1 - \frac{1}{2^{j-1}}\right) \frac{\zeta(j)}{(\ln z)^j} \right] \\ &= \frac{(\ln z)^n}{\Gamma(n+1)} \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\ln z)^2} + n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{(\ln z)^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (49)$$

である。

時間があれば、講義で近似第二項を導出する。

2.6 ハドロン散乱

ハドロン散乱の特徴

強い相互作用 大きな微分断面積

散乱粒子が重い 低エネルギーでも短い(原子核の大きさ程度の)ド・ブロイ波長
(歴史的に重要) \rightarrow 半古典軌道的理解が可能 (な場合がある)。

ラザフォード散乱（古典クーロン散乱）の取り扱い

原点にある電荷 Ze の標的粒子と、質量 m 、電荷 ze の粒子との散乱（運動）を考える。散乱粒子の座標を r とおくと、運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = Zze^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (50)$$

となる。始状態（無限遠）の速度を v 、衝突係数を b とし、最近接点での速度を u 、距離を r とおくと、角運動量保存則から、

$$\begin{aligned} mv \cdot b &= mu \cdot r \\ u &= \frac{bv}{r} \end{aligned} \quad (51)$$

である。またエネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + Zze^2 \frac{1}{r} \quad (52)$$

であるので、両保存則から、

$$b^2 = \left(r - Zze^2 \frac{1}{mv^2} \right)^2 - \left(\frac{Zze^2}{mv^2} \right)^2 \quad (53)$$

となる。

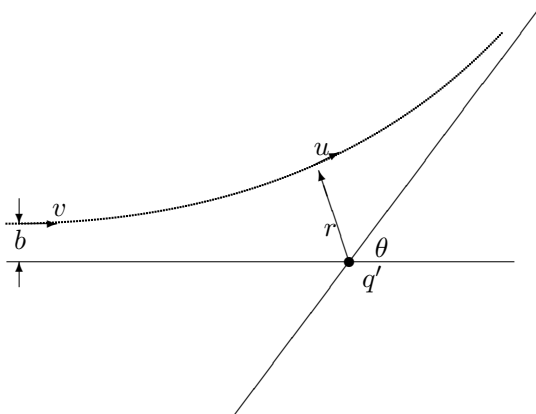


図 7: ラザフォード散乱の古典軌道

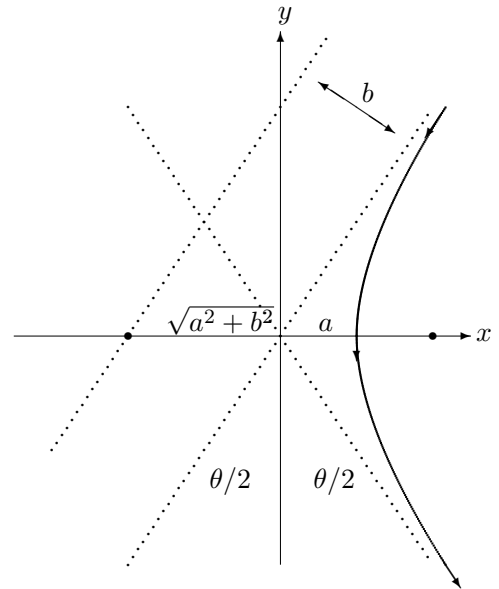


図 8: 双曲線軌道

さて、粒子の軌道として双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x > 0) \quad (54)$$

を考えると、焦点は、

$$(x, y) = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \quad (55)$$

であり、粒子の軌道の偏向角（散乱角） θ は、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{a}{b} \quad (56)$$

となる。この双曲線軌道は、焦点 $(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ に対する衝突係数は b で、最近接距離 r は、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} + a = b \frac{\sin \frac{\theta}{2} + 1}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (57)$$

で与えられる。

式から、ラザフォード散乱（古典クーロン散乱）の軌道は双曲線軌道で与えられることが分かる。式(53)と式(57)から、衝突係数 b と散乱角 θ の関係は、

$$b = \frac{Zze^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (58)$$

と表される。

微分散乱断面積は、内側の半径が b 、外側の半径が $b + db$ のドーナツの面積 $d\sigma$ を考えて、

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b \cdot db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta \\ &= \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\Omega \quad (d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{Zze^2}{4E} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \quad (E = \frac{1}{2}mv^2) \end{aligned}$$

とラザフォードの散乱公式で表される。

虹散乱

実際の散乱では、入射粒子と標的原子核が接する衝突係数 b_{crit} （または散乱角度 θ_{crit} ）において、入射粒子は標的原子核の強い核力（引力）を急に感じ[核力は短距離力であるため、これより大きな衝突係数では（あまり）寄与しない]、散乱角度は大きく（符号も含めて）変わる。

断面積の式に $db/d\theta$ の項があることから分かる様に、断面積は θ_{crit} において発散する。更に $b-\theta$ の関係から、 $\theta > \theta_{\text{crit}}$ において、断面積のラザフォード散乱に対する比は単調に減少する事が期待される。このような特徴を持つ散乱を、光の散乱現象に準えて、**虹散乱 (rainbow scattering)**という。

実際、このような散乱は ^{28}Si 標的に ^{16}O ビームを照射したときの弾性散乱において観測されている。低エネルギー（ < 100 MeV）では虹散乱の特徴が顕著に現れているが、高エネルギー（ > 100 MeV）では振動パターンが現れており、単調に減少するという虹散乱の予言とは異なっている点に注意。

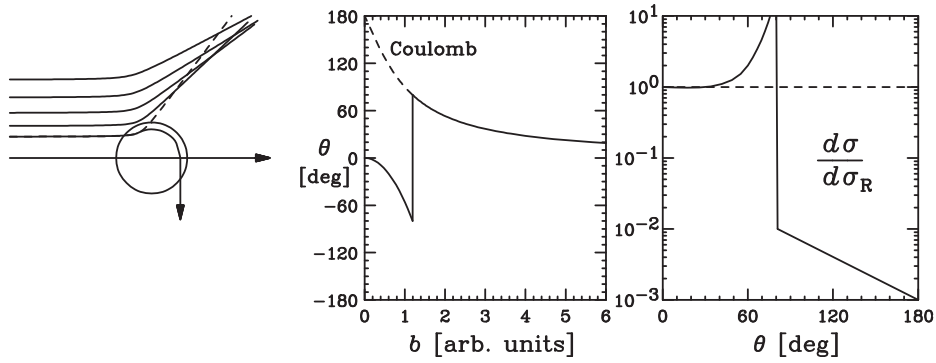


図 9: 核力 (強い相互作用・引力) がある場合の、衝突係数・散乱角度・断面積の関係

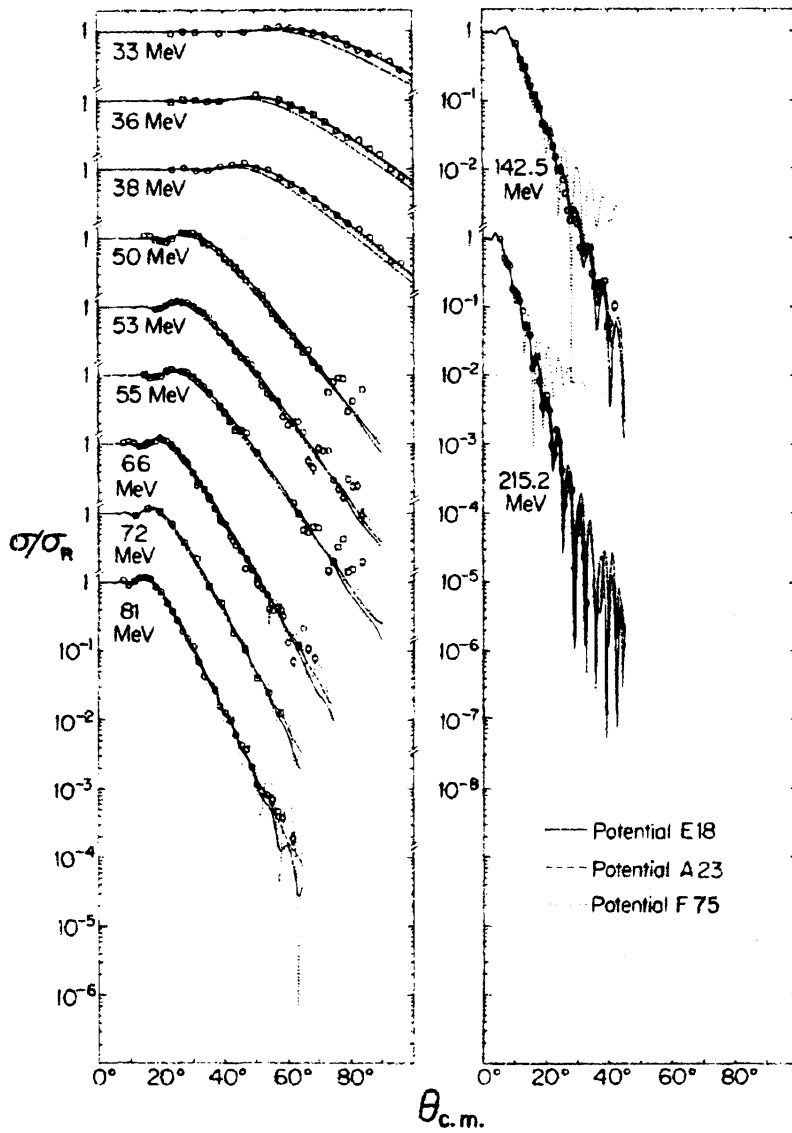


図 10: $^{16}\text{O} + ^{28}\text{Si}$ 弾性散乱。J.G. Cramer *et al.*, Phys. Rev. C 14, 2158 (1976).

演習問題 2

1. 関係式 $q = 2k \sin(\theta/2)$ を導け。
2. $^{208}\text{Pb}(e, e)$ 散乱データから、運動量移行 $q=3 \text{ fm}^{-1}$ での微分散乱断面積の大きさを読み取り、ビーム電流 1 mA、標的の厚さ 1 g/cm^2 、検出器の立体角 1 msr という実験条件で、統計精度 1%を得るのに必要な測定時間を計算せよ。
3. 文献を調べ、ラザフォード散乱とモット散乱の違いについて説明せよ。
4. 原子核の密度分布関数として、ウッズ・サクソン型を仮定する。この時、表面の厚さ t は原子核の種類によらず、およそ 2.4 fm となる事を示せ。ただし、表面のぼやけの変数を $a = 0.55 \text{ fm}$ とする。

計算・メモ用余白