

### 3 角運動量とスピン

原子核 ( $\sim \text{fm}$ ) のようなマイクロな系を取り扱う為には量子力学が必須である。特に原子核は、有限な大きさを持つ孤立系であるという特徴があり、球対称性 (一般には軸対称性) を持つ  $\rightarrow$  回転不変。このような時の基本的な物理量 (保存量) は角運動量であり、角運動量の量子数によって原子核の量子力学的状態が分類される (c.f. 並進に対して不変  $\rightarrow$  運動量が良い量子数)。

#### 3.1 球対称な場合のシュレディンガー方程式の解

中心力場  $V(r)$  (球対称) 内のシュレディンガー方程式

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

は、球対称性から  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  を球座標  $(r, \theta, \phi)$  に変換し、更に波動関数を  $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi) = \chi(r)Y(\theta, \phi)/r$  と変数分離すると、角運動量演算子  $\mathbf{l}$  を、

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2)$$

として、

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] \chi_{nl}(r) &= E\chi_{nl}(r) \\ \mathbf{l}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi) \\ l_z Y_{lm}(\theta, \phi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

と表される。但し、

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^2 &= -\frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\ l_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ l_{\pm} &= \hbar e^{i\phi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

である。ここで  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  は球面調和関数 (ルジャンドル球関数を用いて表現される) であり、角運動量演算子  $\mathbf{l}^2$  と  $l_z$  の同時固有関数である。この時、演算子  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{p}$  の交換関係、

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar \quad (5)$$

から、

$$[l_i, l_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} l_k \quad (6)$$

となる<sup>2</sup>。式 (6) から、

$$[\mathbf{l}^2, l_z] = 0 \quad (7)$$

となり、 $\mathbf{l}^2$  と  $l_z$  が同時固有状態を持つ事が分かる。

実は、式 (6) が一般の角運動量演算子の本質を表しており、ここに現れた軌道角運動量はその一例に過ぎない。以下、一般の軌道角運動量について見ていく。

<sup>2</sup> $\epsilon_{ijk}$  は 2 つの添え字が等しい時は 0、 $ijk$  が 123 の偶置換なら +1、奇置換なら -1 である。

### 3.2 一般化された角運動量と昇降演算子

角運動量の次元は作用 ( $J \cdot s$ ) と同じであり、 $\hbar$  (プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割ったもの) を単位とする。以下では、簡単の為  $\hbar = 1$  の単位系で考える (必要に応じて  $\hbar$  を復活させる)。

$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  をエルミート ( $J^\dagger = J$ ) なベクトル演算子とし、それが以下の (軌道角運動量が満たす) 交換関係を満たすとする。

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \quad (8)$$

この時、

$$[\mathbf{J}^2, J_z] = 0 \quad (9)$$

である。以下で  $\mathbf{J}^2$  と  $J_z$  の同時固有状態を求める。

まず準備として、ディラックに従いブラ (bra)  $\langle \psi |$  とケット (ket)  $|\psi\rangle$  を導入する。波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  を抽象的な (無限次元の) 「状態空間」におけるベクトルと考え、

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \psi(\mathbf{r}) \quad (10)$$

$$\langle \phi | \leftrightarrow \phi^*(\mathbf{r}) \quad (11)$$

と表す。この時、内積は、

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (12)$$

と表される。

他方、ブラ・ケットと内積は状態空間の基底関数を用いて表す事ができる。状態空間の基底関数、

$$u_n(\mathbf{r}), n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

で波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  を展開する。基底関数は規格化された完全直行関数系 (3次元空間なら、 $xyz$  各軸の単位ベクトル) を形成する。展開すると、

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n a_n u_n(\mathbf{r}), \quad \phi(\mathbf{r}) = \sum_n b_n u_n(\mathbf{r}) \quad (14)$$

となるが、この時は (無限次元の) 列ベクトルと行ベクトルがケットとブラに対応し、

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \langle \phi | \leftrightarrow (b_1^*, b_2^*, b_3^*, \dots) \quad (15)$$

となり、内積は、

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_n b_n^* a_n \quad (16)$$

と表される。

いよいよブラ・ケットを用いて、一般化された角運動量の固有値・固有ベクトルを求める。まず次の演算子

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y \quad (17)$$

を導入する。±の記号の意味は昇降の意味で以下の議論で明らかになる。ここで  $J_+^{\dagger} = J_-$  に注意。式(8)と(17)から

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm} \\ [J_+, J_-] &= 2J_z \end{aligned} \quad (18)$$

となる。

以下、順に考える。

1.  $\mathbf{J}$  はエルミートなベクトル演算子であるので、

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{J}^2 | \psi \rangle &= (\langle \psi | \mathbf{J}^{\dagger}) (\mathbf{J} | \psi \rangle) = |\mathbf{J} | \psi \rangle|^2 \geq 0 \\ \langle \psi | J_i^2 | \psi \rangle &= (\langle \psi | J_i^{\dagger}) (J_i | \psi \rangle) = |J_i | \psi \rangle|^2 \geq 0 \quad (i = x, y, z) \end{aligned} \quad (19)$$

である。従って  $\mathbf{J}^2$  の固有値は非負 ( $\geq 0$ ) であり、非負の実数  $j (\geq 0)$  を用いて  $j(j+1)$  と書く事ができる。ここで  $J_z$  の固有値を  $m$  として、同時固有状態を  $|jm\rangle$  とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1) |jm\rangle \\ J_z |jm\rangle &= m |jm\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

2.  $|jm\rangle$  は  $J_x^2 + J_y^2 = \mathbf{J}^2 - J_z^2$  の固有状態でもあり、“1.”と同じ理由からその固有値は非負である。

$$(\mathbf{J}^2 - J_z^2) |jm\rangle = [j(j+1) - m^2] |jm\rangle \quad (21)$$

であるので、

$$m^2 \leq j(j+1) \quad (22)$$

となり、 $m$  には上限と下限が存在する事が分かる。それらを  $m_{\uparrow}$ 、 $m_{\downarrow}$  とすると、

$$-\sqrt{j(j+1)} \equiv m_{\downarrow} \leq m \leq m_{\uparrow} \equiv \sqrt{j(j+1)} \quad (23)$$

となる。

3.  $[\mathbf{J}^2, J_{\pm}] = 0$  から  $\mathbf{J}^2 J_{\pm} = J_{\pm} \mathbf{J}^2$ 。また  $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$  から  $J_z J_{\pm} = J_{\pm} (J_z \pm 1)$ 。これらから、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 (J_{\pm} |jm\rangle) &= J_{\pm} \mathbf{J}^2 |jm\rangle = j(j+1) (J_{\pm} |jm\rangle) \\ J_z (J_{\pm} |jm\rangle) &= J_{\pm} (J_z \pm 1) |jm\rangle = (m \pm 1) (J_{\pm} |jm\rangle) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。即ち、 $J_{\pm} |jm\rangle$  もまた  $\mathbf{J}^2$  と  $J_z$  の同時固有状態であり、その固有値は各々  $j(j+1)$  と  $(m \pm 1)$  である。この事から  $J_{\pm}$  は、

- $\mathbf{J}^2$  の固有値は変えない
- $J_z$  の固有値を  $\pm 1$  だけ変化させる

という特徴をもつ演算子である事が分かる。この特徴から**昇降演算子**と呼ばれる。

4.  $J_z$  の固有値  $m$  には、上限: $m_\uparrow$  と下限: $m_\downarrow$  があるので、

$$J_+|jm_\uparrow\rangle = 0, \quad J_-|jm_\downarrow\rangle = 0 \quad (25)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_z \\ \rightarrow J_+J_- &= J_-J_+ + 2J_z \end{aligned} \quad (26)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \\ &= J_+J_- + J_z(J_z - 1) \\ &= J_-J_+ + J_z(J_z + 1) \end{aligned} \quad (27)$$

であるので、

$$\begin{aligned} J_+J_- &= \mathbf{J}^2 - J_z(J_z - 1) \\ J_-J_+ &= \mathbf{J}^2 - J_z(J_z + 1) \end{aligned} \quad (28)$$

である。

ここで、

$$\begin{aligned} 0 &= J_-J_+|jm_\uparrow\rangle \\ &= [j(j+1) - m_\uparrow(m_\uparrow + 1)]|jm_\uparrow\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

から  $m_\uparrow = j$  ( $\because |jm_\uparrow\rangle \neq 0$ )。ここで  $m_\uparrow = -(j+1)$  は下限  $-\sqrt{j(j+1)}$  より小さいので解ではない。同様に  $m_\downarrow = -j$  も導かれる。以上まとめると、

$$m_\uparrow = j, \quad m_\downarrow = -j \quad (30)$$

5.  $J_z$  の固有値は  $J_\pm$  により  $\pm 1$  ずつ変化する (量子化されている) ので、 $m$  のとり得る範囲は、

$$m = -j, -(j-1), -(j-2), \dots, j-2, j-1, j: (2j+1) \text{ 個の状態} \quad (31)$$

である。この事から  $2j$  は (非負の) 整数でなければならず、

$$j = 0, 1, 2, \dots (\text{整数}) \quad \text{または} \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots (\text{半整数}) \quad (32)$$

である。

6.  $|jm\rangle$  は規格化された固有ベクトルとする。  $m < j$  ならば、

$$J_+|jm\rangle = c_+|jm+1\rangle \quad (33)$$

とおける。 $J_+^\dagger = J_-$  であるので、

$$\langle jm|J_- = c_+^* \langle jm+1| \quad (34)$$

となるので、

$$\langle jm|J_-J_+|jm\rangle = |c_+|^2 \underbrace{\langle jm+1|jm+1\rangle}_{=1} = |c_+|^2 \quad (35)$$

である。

ここで、先程示した、

$$J_-J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z + 1) \quad (36)$$

の関係を用いると、

$$\langle jm|J_-J_+|jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)] \underbrace{\langle jm|jm\rangle}_{=1} = (j-m)(j+m+1) \quad (37)$$

である。 $c_+$  の位相は任意に選べるが、習慣として正の実数にとる。従って、

$$\begin{aligned} c_+ &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \\ J_+|jm\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|jm+1\rangle \end{aligned} \quad (38)$$

である。 $J_-$  についても同様に求められ、まとめると、

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|jm \pm 1\rangle, \quad (\text{複号同順}) \quad (39)$$

となる。この式を用いると、規格化された  $m$  が最大の状態  $|jj\rangle$  (**最大ウエイト状態**と呼ぶ) から出発し、 $J_-$  を繰り返し作用させることにより、 $|jm\rangle$  が

$$|jm\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}} (J_-)^{j-m}|jj\rangle \quad (40)$$

と求められる。逆に  $|j-j\rangle$  に  $J_+$  を繰り返し作用させても同様に求められる。

最大ウエイト状態  $|jj\rangle$  については、演算子  $\mathbf{J}^2$  と  $J_z$  の具体的表現が与えられれば、以下の連立方程式、

$$\begin{aligned} J_z|jj\rangle &= j|jj\rangle \\ J_+|jj\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

を解くことに求める事ができる。

一般化された角運動量  $\mathbf{J}^2$ 、 $J_z$  の固有値は式 (20) で与えられ、そのとり得る値の範囲は式 (31)・(32) で与えられる。この時の状態  $|jm\rangle$  は、

角運動量の大きさが  $j$  で、その  $z$  成分が  $m$  の状態

と呼ばれる。

式 (39) から、

$$\langle jm|J_x|jm\rangle = \langle jm|J_y|jm\rangle = 0 \quad (42)$$

である。この事から、

$|jm\rangle$  状態は決まった  $z$  成分  $m$  を持ち、且つ  $x, y$ -方向には平均すると 0 になるように、大きさが  $j(j+1)$  の傾いた角運動量ベクトル ( $z$ -方向への射影成分が  $m$ ) が  $z$ -軸の周りを回転している状態

と“古典的”には解釈される。

ここで、最大ウエイト状態  $|jj\rangle$  を考えると、

$$\langle jj|J_x^2 + J_y^2|jj\rangle = j(j+1) - j^2 = j \quad (43)$$

であるので、古典的描像に反して、

角運動量ベクトルは  $z$ -軸に並行では無く、 $xy$ -平面内の“零点振動”が存在する

ことに特に注意すべきである。実際、角運動量の大きさは、

$$\sqrt{\langle jm|\mathbf{J}^2|jm\rangle} = \sqrt{j(j+1)} \quad (44)$$

であって  $j$  ではないが、これは零点振動の効果によるものである。

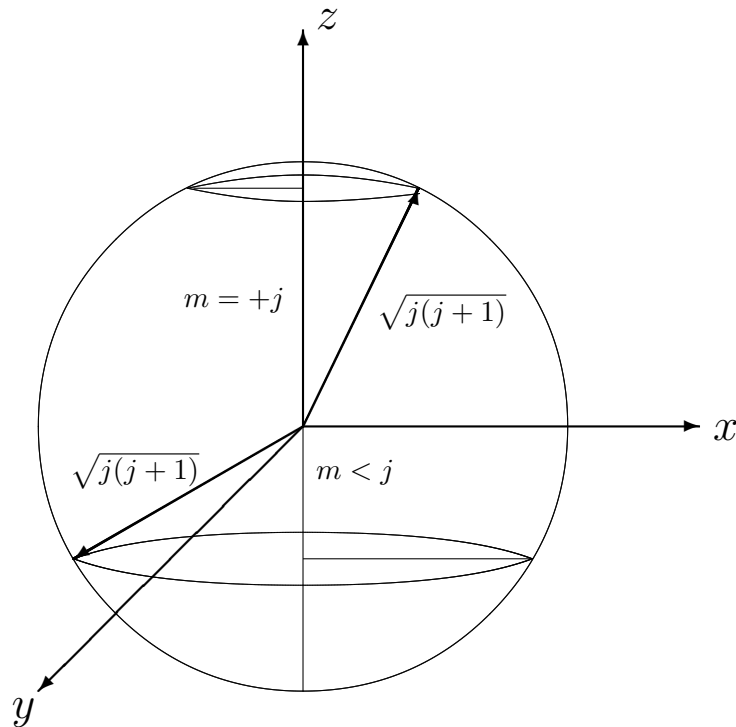


図 1: 角運動量 (ベクトル) の古典的解釈。プリセッションや零点振動が存在する。

以上のように、一般化された角運動量の固有値並びに固有状態は、その代数関係式 (8) のみから数学的に導かれる。その大きさ  $j\hbar$  は  $\hbar$  の整数倍又は半整数倍の値をとる。

古典的極限をとるには  $j\hbar$  を一定に保ったまま、 $\hbar \rightarrow 0$  (同時に  $j \rightarrow \infty$ ) とすれば良いが、 $\langle jj|J_x^2 + J_y^2|jj\rangle = j\hbar^2 \rightarrow 0$  である。従って古典的極限では零点振動の効果は無くなり、古典的描像が厳密に成り立っている。

軌道角運動量  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  は  $l = 0, 1, 2, \dots$  (整数) となっている例である。ここで  $l$  が整数になる理由は、球面調和関数  $Y_{lm}(\theta, \phi) \propto e^{im\phi} P_{lm}(\cos\theta)$  が  $\mathbf{r}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) の 1 価関数でなければならないからである。実際、 $e^{im\phi}$  が  $\phi = 0$  と  $2\pi$  で等しくなることから  $m$  は整数でなければならない、結果  $l$  も整数になる。

### 3.3 スピン角運動量

角運動量は一般に整数又は半整数の値をとる事が分かった。軌道角運動量は整数をとる角運動量の一例であるが、半整数をとる角運動量は実在するだろうか? 明らかにその固有関数は球面調和関数の様な通常関数で表すことはできない ( $m$  が半整数の時、 $e^{im\phi}$  は  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  で一価関数とならない。この時は複数の成分を持った関数の集合であるスピノルという数学量で表される)。

実は一般に素粒子は静止した状態でも、ある決まった角運動量  $J$  を持っており、このような奇妙な角運動量を **スピン角運動量 (通称スピン)** と呼ぶ。因みに粒子のスピンと統計性には関係があり、

統計性	⇐	総称	⇐	スピン
フェルミ・ディラック統計	⇐	フェルミ粒子 (フェルミオン)	⇐	半整数
ボーズ・アインシュタイン統計	⇐	ボーズ粒子 (ボゾン)	⇐	整数

である。例えば、光子 (フォトン) はスピン 1、 $^4\text{He}$  原子核 (アルファ粒子) はスピン 0 のボゾンであるのに対して、電子、陽子、中性子はスピン 1/2 のフェルミオンである。また陽子・中性子の励起状態であるデルタ粒子 ( $\Delta$ ) はスピン 3/2 を持つ。スピン角運動量は内部角運動量とも呼ばれ、素粒子を特徴付ける量の 1 つである。古典的には素粒子は大きさを持たない (構造が無い) が “自転” してスピンを持っていると解釈できる。

大きさの無いものが自転するというのはある種の矛盾を含むが、そもそもスピンは量子化された量であり古典的描像には限界がある (とはいえ直感的理解には古典的描像は有効である)。

### 角運動量と磁気モーメント

一般に、角運動量  $\mathbf{J}$  を持った質量  $m$  の粒子には、磁性を生じさせる磁気モーメント (磁気双極子演算子)  $\boldsymbol{\mu}$  が付随する。

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu_0 g}{\hbar} \mathbf{J}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2m} \tag{45}$$

ここで  $\mu_0$  は磁気モーメントを測る単位であり **磁子 (magneton)** と呼ばれ、

磁子名	記号	磁子の値
ボーア磁子 (Bohr magneton)	$\mu_B$	$\frac{e\hbar}{2m_e}$ ( $m_e$ は電子質量)
核磁子 (Nuclear magneton)	$\mu_N$	$\frac{e\hbar}{2m_N}$ ( $m_N$ は核子 (陽子・中性子) 質量)

である。また  $g$  は  $g$ -因子 ( $g$ -factor) と呼ばれる量であり、各粒子に固有の値をとり、

$$g_e(\text{電子}) = 2.002, \quad g_p(\text{陽子}) = 5.586, \quad g_n(\text{中性子}) = -3.826 \quad (46)$$

である。実はディラック方程式 (フェルミ粒子に対する相対論的波動方程式) によると、スピン  $\frac{1}{2}$  の電荷  $\pm e$  をもつ粒子に対しては  $g = 2$  となる事が知られている。ディラック方程式を満たす粒子をディラック粒子と呼ぶが、電子は  $g = 2$  に非常に近くディラック粒子であるが、陽子・中性子は大きくズレておりディラック粒子ではない。

陽子や中性子がディラック粒子ならば  $g_p = 2$ ,  $g_n = 0$  のはずである。これから大きくズレるのは、陽子や中性子が構造を持っており真の素粒子でない事に起因する。現実の陽子や中性子は、

$$\begin{aligned} p &= \text{"p(bare)"} + (p + \pi^0) + (n + \pi^+) + \dots \\ n &= \text{"n(bare)"} + (n + \pi^0) + (p + \pi^-) + \dots \end{aligned}$$

と、中間子の“雲”をまとっている。

ここで、ボーア磁子と核磁子は電子 ( $\sim 0.5$  MeV) と核子 ( $\sim 1,000$  MeV) の質量差分異なる為、 $\mu_B$  は  $\mu_N$  に比べて約 2,000 倍大きい。従って電子が存在する場合、磁性に関しては電子のスピンが支配的になる。

次に軌道角運動量が磁性に及ぼす影響を考える。電荷  $e$  を持って半径  $r$  速度  $v$  で運動している粒子 (軌道角運動量  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ ) による環状電流  $I$

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \quad (47)$$

を考える。アンペールの法則からこの環状電流は、

$$\mu = I \cdot S (\text{環状電流の張る面積}) = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{e}{2m} r(mv) = \frac{e}{2m} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \frac{e\hbar}{2m} \frac{|\mathbf{l}|}{\hbar} \quad (48)$$

の大きさを持ち、 $\mathbf{l}$  の方向を向いた磁気双極子モーメントと等価である。すなわち、軌道角運動量の  $g$ -因子は 1 である事が分かる。

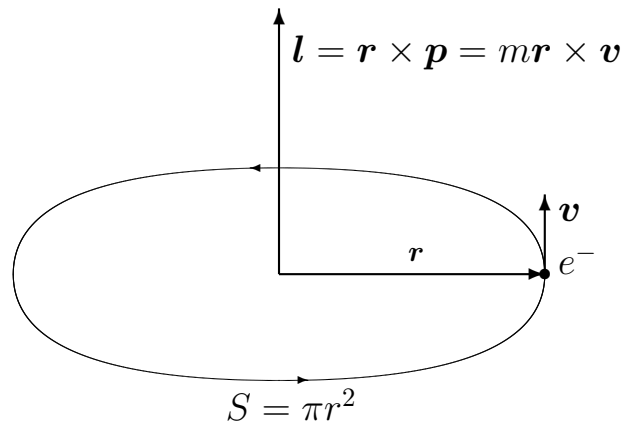


図 2: 電荷  $e$  を持ち、半径  $r$  速度  $v$  で円運動している粒子。磁気モーメントの方向は  $\mathbf{l}$  である。

一般に磁気モーメント  $\mu$  は、軌道磁気モーメント  $\mu_l$  とスピン磁気モーメント  $\mu_s$  の和、

$$\mu = \mu_l + \mu_s \quad (49)$$

で表される。ここで電子の場合、 $g_e = 2$  とすると、

$$\mu_e = \mu_B \frac{(\mathbf{l} + 2\mathbf{s})}{\hbar} \tag{50}$$

となる。 $(\mathbf{l} + \mathbf{s})$  ではなく  $(\mathbf{l} + 2\mathbf{s})$  である点に注意せよ。

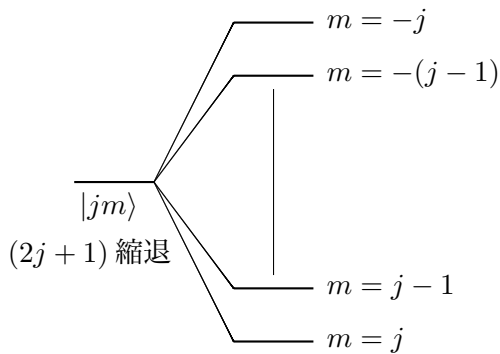
スピンの0ではない荷電粒子は有限のスピン磁気モーメント  $\mu_s$  を持ち、磁場と相互作用する。そのエネルギーは、

$$V_{\text{spin}} = -\mu_s \cdot \mathbf{H} \rightarrow -\frac{\mu_0 g}{\hbar} H J_z \quad (\mathbf{H} \parallel z\text{-軸}) \tag{51}$$

で与えられる。 $\mathbf{H}$  の方向を量子化軸 ( $z$ -軸) にとると、

$$V_{\text{spin}}|jm\rangle = -\mu_0 g m H |jm\rangle, \quad (m = -j, -(j-1), \dots, j-1, j) \tag{52}$$

であるので、状態  $|jm\rangle$  の  $m$  の値によってエネルギーは異なり、球対称ポテンシャル中での  $m$  によるエネルギーの縮退が解ける。これは、軌道角運動量  $\mathbf{l}$  に対して起こる同様の現象であるゼーマン効果 (Zeeman effect) に対して、**異常ゼーマン効果 (anomalous Zeeman effect)** と呼ばれる。



磁場  $\mathbf{H}$  中  
( $2j + 1$ ) 分離

図3: 角運動量  $j$  (球対称ポテンシャル中で  $(2j + 1)$  重に縮退) の縮退が、磁場  $\mathbf{H}$  中で  $(2j + 1)$  個の状態に解ける様子。

### パウリのスピン行列

以下、特に重要なスピン  $1/2$  の粒子に対する非相対論 (パウリの理論) を展開する。

$s = 1/2$  であるので、 $m_s = \pm 1/2$  の2つの状態 (2次元、又は2成分スピノル) からなる。これらを、上向きスピン状態  $|+\rangle$  と下向きスピン状態  $|-\rangle$  とすると、

$$|+\rangle = \left| \underbrace{\frac{1}{2}}_s, \underbrace{\frac{1}{2}}_{s_z} \right\rangle, \quad |-\rangle = \left| \underbrace{\frac{1}{2}}_s, \underbrace{-\frac{1}{2}}_{s_z} \right\rangle \tag{53}$$

である。これら固有ベクトルで張られる2次元空間を考えれば、これらが基底ベクトルであるので、

$$|+\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

である。

$s_{\pm} (\equiv s_x \pm i s_y), s_z$  を  $|+\rangle, |-\rangle$  に作用させると、

$$\begin{aligned} s_+|+\rangle &= 0 & s_-|+\rangle &= |-\rangle & s_z|+\rangle &= \frac{1}{2}|+\rangle \\ s_+|-\rangle &= |+\rangle & s_-|-\rangle &= 0 & s_z|-\rangle &= -\frac{1}{2}|-\rangle \end{aligned}$$

であるので、

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (55)$$

又は、

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

が導かれる。従って、パウリ行列、

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

を用いると、スピン角運動量の行列表現は、

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (58)$$

で与えられる。

パウリ行列の主な性質をまとめると以下の通りである。

- $\det \sigma_k = -1$
- $\text{Tr} \sigma_k = 0$
- $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$
- $\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i$

ここで、 $\epsilon_{ijk}$  は完全反対称テンソルである。

### 3.4 角運動量の合成とクレブシュ・ゴールドン係数

2つの独立な角運動量  $\mathbf{J}_1$  と  $\mathbf{J}_2$  に対して、それらのベクトル和  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  を考える。 $\mathbf{J}$  の固有状態を、 $\mathbf{J}_1$  と  $\mathbf{J}_2$  の固有状態から作る事を**角運動量の合成の問題**という。以下、この問題を考える。

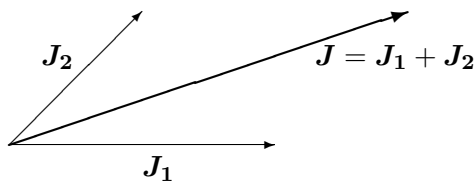


図4: 古典的ベクトル和

まず、 $\mathbf{J}_1$  と  $\mathbf{J}_2$  は独立であるので、

$$[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0 \quad (59)$$

が全ての成分  $[(x, y, z)$  成分] に対して成り立つ。この事から、2つの角運動量の和も一般化された角運動量の交換関係、

$$[J_i, J_k] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k, \quad (60)$$

を満たし、且つ、

$$[\mathbf{J}^2, J_z] = 0 \quad (61)$$

である。また、

$$[\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}] = [\mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}] = 0 \quad (62)$$

も容易に示される。

$(i, j, k) = (x, y, z)$  の場合を考えると、

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= (J_{1;x} + J_{2;x})(J_{1;y} + J_{2;y}) - (J_{1;y} + J_{2;y})(J_{1;x} + J_{2;x}) \\ &= J_{1;x}J_{1;y} + J_{2;x}J_{2;y} - J_{1;y}J_{1;x} - J_{2;y}J_{2;x} \quad (\because J_{1;x}J_{2;y} = J_{2;y}J_{1;x}, \text{ etc.}) \\ &= i\hbar(J_{1;z} + J_{2;z}) = i\hbar J_z \end{aligned} \quad (63)$$

今の場合、2つの角運動量が交換する（独立である）ので、

$\mathbf{J}_1$  と  $J_{1;z}$  の同時固有状態  $|J_1 m_1\rangle$  と  $\mathbf{J}_2$  と  $J_{2;z}$  の同時固有状態  $|J_2 m_2\rangle$  の直積  $|J_1 m_1\rangle \otimes |J_2 m_2\rangle$  が合成角運動量に対する1つの完全系を定める

が、これまで示した交換関係から、

$\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z$  の4つの演算子の同時固有状態が定める別の完全系

を考える事もできる（両方とも4つの量子数で定められる点に注意）。即ち、

**個別基底状態**  $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \Rightarrow \mathbf{J}_1^2, J_{1;z}, \mathbf{J}_2, J_{2;z}$  の同時固有状態

**合成基底状態**  $|(j_1 j_2) j m\rangle \Rightarrow \mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z$  の同時固有状態

の2つの完全系が考えられる。

これら完全系間の変換はユニタリ変換、

$$|(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle \quad (64)$$

で表される（完全系  $1 = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2|$  で展開）。ここで展開係数として、2つの基底ベクトルの内積

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle \quad (65)$$

が現れるが、これを**クレブシュ・ゴルダン係数 (Clebsch-Gordan coefficient)**、略して**CG 係数**という。CG 係数においては  $(j_1 j_2)$  は一般には省略される。

以下では、合成角運動量の大きさ  $j$  と  $m$  がどのような値をとり得るか、言い換えればCG 係数が0でないために必要な条件（**選択規則**という）を調べる。

1.  $J_z = J_{1;z} + J_{2;z}$  の両辺を  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 |$  と  $| (j_1 j_2) j m \rangle$  で行列要素をとる。  $J^\dagger = J$  に注意すると、

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_z | (j_1 j_2) j m \rangle &= m \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m \rangle \\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_{1;z} + J_{2;z} | (j_1 j_2) j m \rangle &= (m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m \rangle \end{aligned} \quad (66)$$

であるので、

$$[m - (m_1 + m_2)] \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m \rangle = 0 \quad (67)$$

従って、 $m = m_1 + m_2$  を満たさない限り CG 係数は 0 となる。

2. 角運動量の固有値の一般論から、

$$|m_1| \leq j_1, \quad |m_2| \leq j_2 \quad \Rightarrow \quad |m| \leq j_1 + j_2 \quad (68)$$

である。従って  $j$  のとり得る最大値  $j_\uparrow$  は  $j_1 + j_2$  である。

3.  $j$  のとり得る最小値  $j_\downarrow$  は各基底の次元数が等しいことから求めることができる。まず個別基底状態の場合、

$$| (j_1 j_2) j m \rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \quad (69)$$

であり、基底の張る次元は  $m_1 \times m_2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  である。

次に合成基底状態の場合、

$$| j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \sum_{j m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle | (j_1 j_2) j m \rangle \quad (70)$$

である。各  $j$  に対して  $m$  は  $2j + 1$  個の値をとるので、基底の次元は、

$$\sum_{j=j_\downarrow}^{j_\uparrow} (2j + 1) = \sum_{k=0}^{j_\uparrow - j_\downarrow} (2k + 2j_\downarrow + 1) = (j_\uparrow + j_\downarrow + 1)(j_\uparrow - j_\downarrow + 1) \quad (71)$$

である。

$j_\uparrow = j_1 + j_2$  と、各基底の次元数が等しい事から、

$$j_\downarrow = |j_1 - j_2| \quad (72)$$

が分かる。

以上から、合成角運動量  $(j m)$  のとり得る値は、

$$m = m_1 + m_2, \quad |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad (73)$$

という**選択規則**を同時に満たさなければならない事が示された。

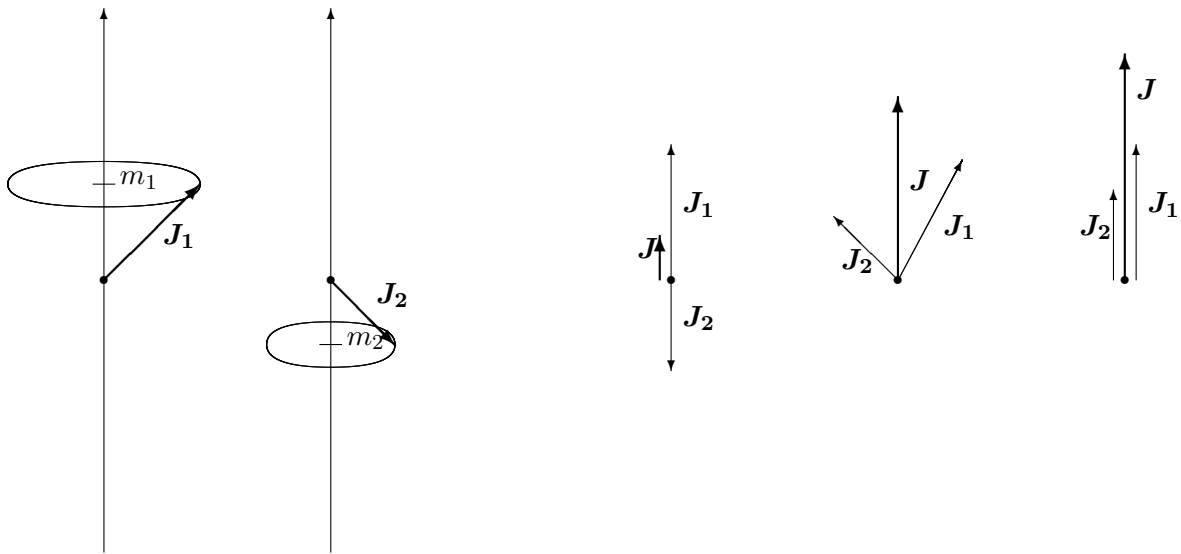


図 5: 角運動量の合成の例。

選択規則の式は古典論におけるベクトル和  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  の量子力学的表現になっていると考えられる。因みに、 $\mathbf{J}_1$  と  $\mathbf{J}_2$  の成す角度  $\theta_{12}$  を、 $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\sqrt{J_1^2 J_2^2} \cos \theta_{12}$  で定義すると、

$$\cos \theta_{12} = \frac{j(j+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2\sqrt{j_1(j_1+1)j_2(j_2+1)}} \quad (74)$$

と表される。古典論では、

$$\cos \theta_{12} = \frac{j^2 - j_1^2 - j_2^2}{2j_1j_2} \quad (75)$$

である。

CG-係数の具体的な値については、表 1 参照。ここでは原子核物理で重要な、2つのスピン 1/2 の合成と、軌道角運動量とスピン 1/2 の合成を考える。

### 2つの 1/2-スピン $s$ の合成

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$  である。ここで、

$$\left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\pm \pm\rangle \quad (\text{複号任意}) \quad (76)$$

とする ( $2 \times 2 = 4$  次元である)。

$s = 1$  で  $m = s_z = \pm 1$  となるのは明らかに  $|\pm \pm\rangle$  (複号同順) である。従って、

$$\left| \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) 11 \right\rangle = |++\rangle \quad (77)$$

である。これに  $s_- = s_{1;-} + s_{2;-}$  を作用させると、

$$s_- |(\frac{1}{2}\frac{1}{2})11\rangle = \sqrt{2}|(\frac{1}{2}\frac{1}{2})10\rangle$$

$$(s_{1;-} + s_{2;-})|++\rangle = |+-\rangle + |-+\rangle$$
(78)

であるので、

$$|(\frac{1}{2}\frac{1}{2})10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$$
(79)

となる。 $|(\frac{1}{2}\frac{1}{2})00\rangle$  はこれまで求めた3つの状態との直行条件（及び規格化条件）から求められる。以上まとめると、

	$s = 1$	$s = 0$
$m = 1$	$ 11\rangle =  ++\rangle$	
$m = 0$	$ 10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( +-\rangle +  -+\rangle)$	$ 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( +-\rangle -  -+\rangle)$
$m = -1$	$ 1-1\rangle =  --\rangle$	

(80)

となり、2つのスピン1/2の場合のCG-係数が求まっている（表1と比較せよ）。

$m = 1$  の状態をスピン3重項状態 (spin triplet state)、 $m = 0$  の状態をスピン1重項状態 (spin singlet state) と呼ぶ。式から明らかな様に、スピン3重項状態は粒子の入換えに対して（スピン空間では）対称（符号が変わらない）のに対して、スピン1重項状態は反対称（符号が変わる）という性質を持つ。この事はもっとも簡単な原子核である重陽子（スピン1/2を持つ陽子と中性子1つずつから成る）を考える時に重要となる。

### 軌道角運動量 $l$ と 1/2-スピン $s$ の合成

ここでは核子（陽子・中性子）が3次元空間（原子核）内を運動する場合の1粒子波動関数を考える。 $j = l + s$  であり、合成スピン（全角運動量）は  $j = l \pm 1/2$  である。ここで、 $j_> = l + 1/2$  ( $j$ -upper と呼ぶ)、 $j_< = l - 1/2$  ( $j$ -lower と呼ぶ) とする。

**個別基底 ( $ls$ -coupling)**  $|lm_l\rangle \otimes |+\rangle$ 、 $|lm_l\rangle \otimes |-\rangle$

**合成基底 ( $jj$ -coupling)**  $|(l\frac{1}{2})jm\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \rangle |lm_l\rangle \otimes |\frac{1}{2} m_s\rangle$  ,

である。各次元は、 $(2l + 1) \times 2$  と、 $(2j_> + 1) + (2j_< + 1) = 2(2l + 1)$  で当然等しい。具体的にCG-係数を求めると、

$$|(l\frac{1}{2})(l \pm \frac{1}{2})m\rangle = \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$$
(81)

となる。

核子間の力（核子が原子核内で感じる核力）はスピンに依存する（詳しくは後の講義）ので、一般に軌道角運動量もスピン角運動量も保存せず（良い量子数ではない）、角運動量保存則は全角運動量  $j$  についてのみ成り立つ。従って  $j$  は保存量でありよい量子数である。

電子の場合はスピン依存力の効果が無視できる場合が多く、この場合は個別基底の  $ls$ -coupling 状態が用いられるが、核子（原子核）の場合は無視できないので、合成基底の  $jj$ -coupling 状態を用いる必要がある。

このような  $jj$  結合状態は、“ $l_j$ -状態” のように表現する。但し、軌道角運動量の大きさは、

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \quad s, p, d, f, \dots \quad (82)$$

と置き換える。例えば、“ $d_{5/2}$ ” 状態といえは、 $l = 2$ 、 $j = \frac{5}{2}$  の  $j > = l + \frac{1}{2}$  状態である。

原子核ではスピン依存力は本質的であり、同じ  $l = 2$  の状態である  $d_{5/2}$  状態と  $d_{3/2}$  状態の縮退は解けている。ではどちらの状態のエネルギー固有値が低い（安定）であろうか？

CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND  $d$  FUNCTIONS

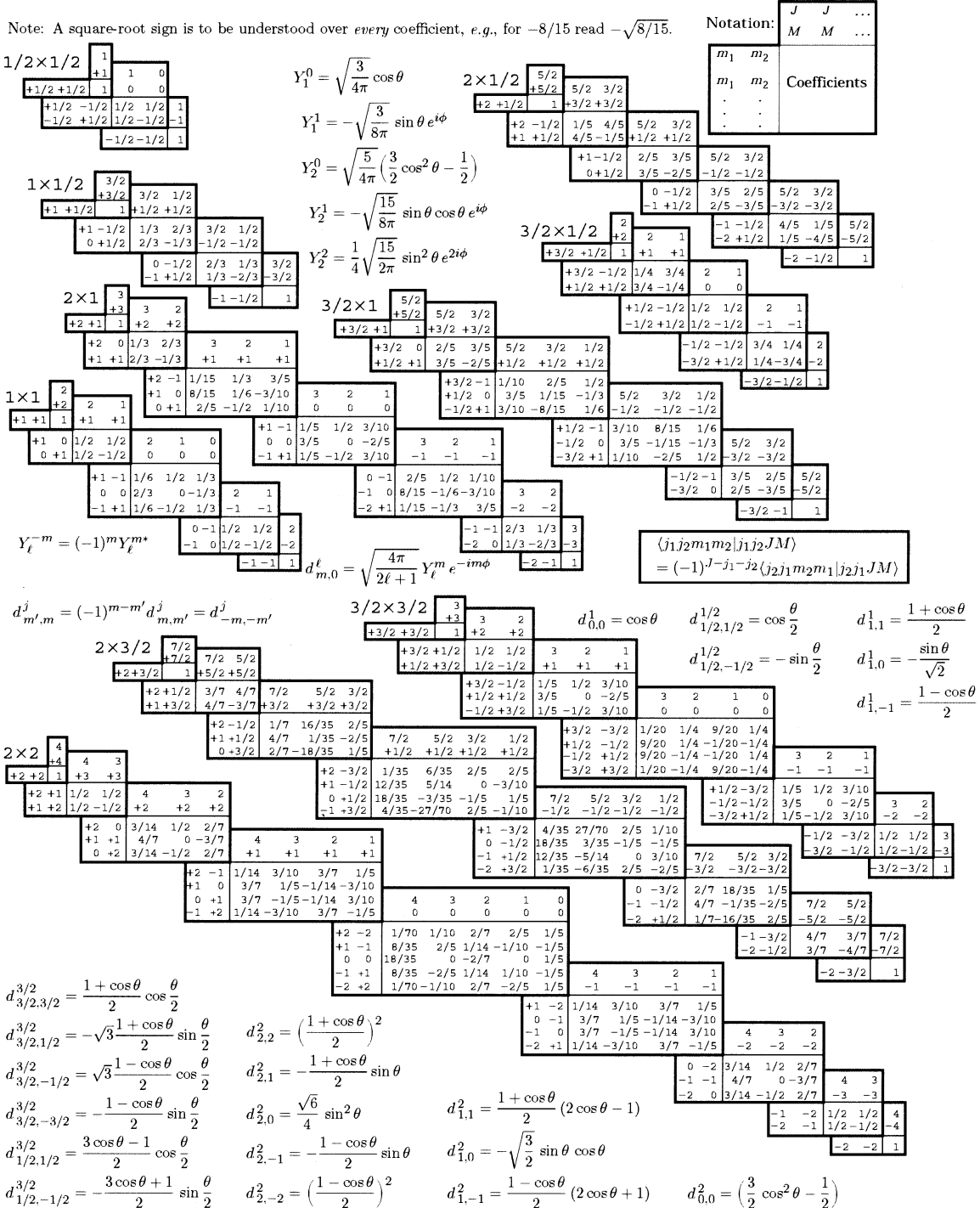


Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

表 1: クレブシュ・ゴールドン係数 (CG 係数) の例。

### 演習問題 3

1. 式 (6) を証明せよ。
2. 軌道角運動量  $l$  に対して、 $(\theta, \phi)$  に関する連立微分方程式

$$\begin{aligned} l_z Y_{ll}(\theta, \phi) &= l\hbar Y_{ll}(\theta, \phi) \\ l_+ Y_{ll}(\theta, \phi) &= 0 \end{aligned}$$

を解き、 $Y_{ll}(\theta, \phi)$ (最大ウエイト状態) を求めよ。ただし、

$$\begin{aligned} l_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ l_{\pm} &= \hbar e^{\pm i\phi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

である。規格化には、

$$\int_0^{\pi} \sin^{2l+1} \theta \, d\theta = 2 \frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!}$$

を用いよ。

3. 電子は素粒子 (構造を持たない) でありディラック粒子と考えられている。にもかかわらず、その  $g$ -因子は 2.002 と 2 から僅かではあるがズレている。これはどのような理由によるか説明せよ。
4. 異常ゼーマン効果の有名な例として、電子のスピンが存在を実験的に確認したシュテルン・ゲルラッハの実験がある。この実験について説明せよ。
5. 次の等式、

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))$$

を導け。

## 計算・メモ用余白