

## 4 粒子の統計性とスピン・アイソスピン自由度

原子核は  $Z$  個の陽子と  $N$  個の中性子から成り、自然界に存在する原子核は  $A = Z + N \lesssim 300$  個の核子から構成される**多粒子系の量子力学系**である（なぜ  $A \lesssim 300$  であるかは講義の後半で分かる）。物性物理学においてはアボガドロ数 ( $N_A \sim 6 \times 10^{23}$ ) 個程度の系を扱うため、粒子数無限大の極限をとることができ、問題が簡単になる場合もある。これとは対照的に、原子核は粒子数がせいぜい 300 個程度であり、粒子数が有限であることが本質的な役割を果たす場合が多い（**有限量子多体系**）。

一般に、複数個の粒子から構成される量子力学系においては、その粒子の統計性を考慮する必要がある。以下ではこのことについて説明する。

### 4.1 粒子の統計性

原子核内にある 1 つの核子の量子力学的状態を指定するためには、座標や角運動量だけではなく、先に見たようにスピンの自由度やこの後に出てくるアイソスピンの自由度といった内部自由度が必要である。そこで、 $i$  番目の粒子の量子力学的状態を指定するために必要なスピン・アイソスピンまで含めた“座標”を  $(i)$  と略記することにする。これに従うと、 $A$  粒子系の波動関数は、

$$\phi_A((1), (2), (3), \dots, (A)) \quad (1)$$

と表される。

さてミクロの量子力学の世界では、同種粒子の入れ換えに対して以下の性質がある。

**ボーズ粒子**  $\phi_A(\dots, (j), \dots, (i), \dots) = +\phi_A(\dots, (i), \dots, (j), \dots)$ : 対称

**フェルミ粒子**  $\phi_A(\dots, (j), \dots, (i), \dots) = -\phi_A(\dots, (i), \dots, (j), \dots)$ : 反対称

これを**粒子の統計性**といい、ミクロの世界では同種粒子が原理的に区別できないことを反映している。

例えば、2 つの衝突する同種粒子について不確定性原理を考えてみる。衝突後の 2 つの粒子が衝突前のどちらの粒子であったか区別できるだろうか？

フェルミ粒子に対するパウリの排他律はこの統計性（フェルミ・ディラック統計）の帰結である。実際、2 つの粒子が相互作用せず同じ状態  $\psi$  を占有すると、その波動関数は  $\Psi((1), (2)) = \psi(1)\psi(2)$  である。ここで反対称性の要求から、 $\Psi((1), (2)) = \psi(1)\psi(2) = -\Psi((2), (1)) = -\psi(2)\psi(1) = -\psi(1)\psi(2)$  であるので、 $\Psi((1), (2)) = 0$  となる。

以下では核子を想定し、波動関数が粒子の入換えに対して完全反対称なフェルミ粒子の場合を考える。一般に粒子間には相互作用があり、多粒子系の波動関数を求めるには多粒子系の相互作用項を含むシュレディンガー方程式を解く必要があるが、これは大変難しい問題である（例えば 3 核子系の解が得られたのもごく最近の事であり、近年の飛躍的計算能力の進歩による）。

反対称な波動関数がどのようにして作られるかは、相互作用の無い（又は無視できるほど小さい）場合を考えるのが簡単である。パウリの排他律に従い、 $A$  個の粒子が独立な（直行する） $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_A$  の状態を占有している場合、これらの積を完全反対称化すると、

$$\Psi_A((1), \dots, (A)) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-)^P P[\psi_1(1), \psi_2(2), \dots, \psi_A(A)] \quad (2)$$

となる。ここで  $P$  は粒子の“座標”  $(1), (2), \dots, (A)$  を入れ換える置換演算子 (交換演算子 (exchange operator)) であり、 $(-)^P$  はその置換の符号 (偶置換なら +、奇置換なら -) である。この式は行列式の定義

$$\Psi_A((1), (2), \dots, (A)) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \dots & \psi_A(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(A) & \dots & \psi_A(A) \end{vmatrix} \quad (3)$$

に他ならず、このような状態を**スレーター行列式 (Slater determinant)** という。

具体例としてスピン  $1/2$  をもつ 2 粒子を考える。スピン空間での 2 粒子の波動関数はスレーター行列式から、

$$\frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} |1; +\rangle & |1; -\rangle \\ |2; +\rangle & |2; -\rangle \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+-\rangle - |-+\rangle] \quad (4)$$

と求められ、以前求めたものと一致する。

## 4.2 アイソスピン

実際には 1 つの粒子の状態を指定するには、座標の他にスピンの状態 (スピン空間での状態) も指定しなければならない、

$$\psi(1) = \underbrace{\psi(\mathbf{r})}_{\text{空間}} \otimes \underbrace{\left| \frac{1}{2} m_s \right\rangle}_{\text{スピン}}, \quad (m_s = \pm \frac{1}{2}) \quad (5)$$

である。

さて原子核の場合には、

**電荷を無視** 核力は電磁気力に比べて強い

**質量差を無視**  $\frac{m_n - m_p}{m_p} \sim 0.001$

であるので、陽子と中性子は同じ粒子 (核子) が別の状態を取っていると解釈することができる。実際、素粒子論の立場からはこのように考えることが理にかなっており、且つ、原子核の立場からも以下に示すように便利である。

核子は陽子と中性子という 2 つの状態をとり得る訳だが、これはスピン  $1/2$  の粒子がスピン上向き  $|+\rangle$  とスピン下向き  $|-\rangle$  の 2 つの状態をとる事と類似している。そこでスピン  $s$  と同様に、 $1/2$  のアイソスピン演算子  $t$  という、スピン角運動量演算子と数学的に等価な演算子を導入し、その固有状態を、

$$\text{中性子} \quad |n\rangle \equiv |+\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\text{陽子} \quad |p\rangle \equiv |-\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

と対応つけることにする<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>原子核物理学では、安定な原子核に対して  $T \geq 0$  となるように中性子をアイソスピンの第 3 成分が“+”とする (重い ( $A \geq 40$ ) 原子核では (中性子数) > (陽子数) の原子核が安定である)。これに対して、素粒子・ハドロン物理学では陽子をアイソスピンの第 3 成分が“+”とするので注意。

1/2 スピン角運動量の時と同様に、この表示に対して1/2 アイソスピンのパウリ行列  $\tau$  を、

$$t = \frac{\tau}{2} \quad (6)$$

で導入する。ここで、スピン角運動量演算子  $s$  の成分は通常の3次元座標空間の  $(x, y, z)$  成分であり、スピン演算子は空間の回転に伴って変換する角運動量の一つである（スピン角運動量演算子  $s$  は、軌道角運動量演算子  $l$  と結合する）。これに対して、アイソスピン演算子は通常の空間とは無関係であり、アイソスピン演算子の成分は核子の内部状態（陽子か中性子か）を表現する抽象的な“アイソスピン空間”の成分であることに注意されたい。そこで通常の空間成分  $(x, y, z)$  と区別して  $(1, 2, 3)$  と書くことにする。すなわち、

$$t_3 \text{の固有値} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{中性子} \\ -\frac{1}{2} & \text{陽子} \end{cases} \quad (7)$$

である。以上から、1つの核子の状態  $\psi_{\text{核子}}$  はスピンと共にアイソスピンを指定することにより、

$$\psi_{\text{核子}}(1) = \underbrace{\psi(\mathbf{r})}_{\text{空間}} \otimes \underbrace{\left| \frac{1}{2} m_{s_1} \right\rangle}_{\text{スピン}} \otimes \underbrace{\left| \frac{1}{2} m_{t_1} \right\rangle}_{\text{アイソスピン}}, \quad m_{s_1} = \pm \frac{1}{2}, \quad m_{t_1} = \pm \frac{1}{2} \quad (8)$$

と表される。

アイソスピンは電荷の違う中性子 ( $0e$ ) と陽子 ( $+e$ ) を区別するので、**荷電スピン**とも呼ばれる。素粒子には核子以外にも0ではないアイソスピンを持つものが存在する。後に見るように、核力の記述に重要な役割を果たすパイ中間子(湯川中間子)には3種類の電荷の違うもの ( $\pm e, 0e$ ) が存在し、アイソスピン1を持つ。このような0ではないアイソスピンを持つ粒子間の相互作用を考える場合には、通常の空間の回転不変性(球対称性)と同時に、内部空間であるアイソスピン空間での回転不変性を考える必要がある。すなわちアイソスピンならびにアイソスピン空間は単に便宜上導入された数学的なものではなく、**素粒子の内部対称性を反映した物理的実態を持ったもの**である。

現実の  $A$  個の核子からなる原子核を考える場合、そのアイソスピンは、角運動量の場合と同様に個々の核子のアイソスピンを合成することにより得られる。全アイソスピンは、

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^A \mathbf{t}_i \quad (9)$$

である。この時、全アイソスピンの第3成分  $T_3$  は、

$$T_3 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^Z \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(N - Z) \quad (10)$$

であり、中性子数と陽子数の差の半分になっている。従って、

$$N = \frac{1}{2}A + T_3, \quad Z = \frac{1}{2}A - T_3 \quad (11)$$

が成り立つ。他方、アイソスピン  $T$  の大きさに関しては、

$$\frac{1}{2}|N - Z| \leq T \leq \frac{1}{2}(N + Z) = \frac{1}{2}A \quad (12)$$

の関係を満たすことが、1/2 アイソスピンの合成を繰り返すことにより示すことができる。

## 4.3 2粒子系の状態-反対称化の例

2粒子系の状態を記述する波動関数は、スレータ行列式から一般に、

$$\Psi((1), (2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1)] \quad (13)$$

と表されるが、核子の場合スピン・アイソスピンの自由度を持っており以下のようにより便利な表示を取ることができる（両者はユニタリ変換で結びついている）

まず簡単のため、スピン自由度のみがある場合を考える（座標空間に対する波動関数並びにアイソスピンが2核子で同じ（対称な）場合に相当する）。この時、反対称な（singlet:  $s = 0$ ）状態は、

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m_{s_1}, m_{s_2}\rangle - |m_{s_2}, m_{s_1}\rangle) \quad (14)$$

と表される。ここで2粒子のスピン1/2状態を、

$$|m_{s_1}, m_{s_2}\rangle = |\frac{1}{2}m_{s_1}\rangle \otimes |\frac{1}{2}m_{s_2}\rangle \quad (15)$$

と略記した。

ここで1/2スピン2粒子系の全波動関数は、合成基底を用いて（CG-係数の項参照）、

	$S = 1$	$S = 0$	
$M_S = 1$	$ 11\rangle =  ++\rangle$		
$M_S = 0$	$ 10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( +-\rangle +  -+\rangle)$	$ 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( +-\rangle -  -+\rangle)$	(16)
$M_S = -1$	$ 1-1\rangle =  --\rangle$		

である。合成スピン  $S = 1$  はスピン3重項状態であり粒子の入れ替えに対して対称であり、合成スピン  $S = 0$  はスピン1重項状態であり粒子の入れ替えに対して反対称である。当然、

$$\Psi_S = |S = 0, M_S = 0\rangle \quad (17)$$

である。

同様に、アイソスピンに対しても反対称な状態

$$\Psi_T = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m_{t_1}, m_{t_2}\rangle - |m_{t_2}, m_{t_1}\rangle) \quad (18)$$

は全アイソスピン  $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$  において  $T = 0$  の状態そのものであり、

	$T = 1$ (対称)	$T = 0$ (反対称)	
$M_T = 1$	$ 11\rangle_T =  nn\rangle$		
$M_T = 0$	$ 10\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}}( np\rangle +  pn\rangle)$	$ 00\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}}( np\rangle -  pn\rangle)$	(19)
$M_T = -1$	$ 1-1\rangle_T =  pp\rangle$		

である。

従って、スピン・アイソスピンの自由度に対して作用する、粒子の入れ替え演算子をおのこの  $P_S, P_T$  とすると、

$$P_S|SM_S\rangle = (-)^{S+1}|SM_S\rangle, \quad P_T|TM_T\rangle = (-)^{T+1}|TM_T\rangle \quad (20)$$

となっている。すなわち、**2核子の合成スピンや合成アイソスピン状態は、粒子を入れ替える交換演算子  $P_S$ 、 $P_T$  の固有状態**となっている（もとのスピンやアイソスピンを合成していない基底（個別基底）はそうならない点に注意）。

合成スピン・アイソスピン状態が対応する交換演算子の固有状態になっていることを用いると、物理的意味がはっきりした（便利な）2核子系の完全反対称状態を作ることができる。実際、空間座標・スピン・アイソスピンすべてを考慮した完全反対称状態を、各々の自由度をあらわに書くと、

$$\Psi((\mathbf{r}_1, m_{s_1}, m_{t_1}), (\mathbf{r}_2, m_{s_2}, m_{t_2})) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)|m_{s_1}, m_{s_2}\rangle|m_{t_1}, m_{t_2}\rangle - \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)|m_{s_2}, m_{s_1}\rangle|m_{t_2}, m_{t_1}\rangle] \quad (21)$$

であるが、スピン・アイソスピンについて角運動量の合成を行うと、

$$\begin{aligned} & \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; SM_S; TM_T) \\ &= \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}} \langle \frac{1}{2} m_{s_1} \frac{1}{2} m_{s_2} | SM_S \rangle \langle \frac{1}{2} m_{t_1} \frac{1}{2} m_{t_2} | TM_T \rangle \Psi((\mathbf{r}_1, m_{s_1}, m_{t_1}), (\mathbf{r}_2, m_{s_2}, m_{t_2})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{[\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) - (-)^{S+1}(-)^{T+1}\psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)]}_{\text{空間}} \underbrace{|SM_S\rangle}_{\text{スピン}} \underbrace{|TM_T\rangle}_{\text{アイソスピン}} \quad (22) \end{aligned}$$

となり、空間座標・スピン・アイソスピン各自由度に対して独立に、粒子交換に対する波動関数の対称性を論じることが出来る。すなわち全体の反対称化  $P_{\text{Total}}$  は、それぞれの自由度に対する交換演算子  $P_r$ 、 $P_S$ 、 $P_T$  を用いて、

$$P_{\text{Total}} = \underbrace{P_r}_{\text{空間}} \cdot \underbrace{P_S}_{\text{スピン}} \cdot \underbrace{P_T}_{\text{アイソスピン}} \quad ; \quad \text{完全反対称} \Leftrightarrow P_{\text{Total}} = -1 \quad (23)$$

と表される。

以上から、完全反対称状態を作るための空間部分の対称性が、 $S$  と  $T$  の値に応じて、

	$S = 1$	$S = 0$
$T = 1$	空間反対称	空間対称
$T = 0$	空間対称	空間反対称

と求められる。

もし陽子と中性子を別々に取り扱う（アイソスピンを考えず異種粒子と考える）場合は、座標空間・スピンに対する完全反対称化を考えることになり、

$S = 1$	$S = 0$
空間反対称	空間対称

となる。

#### 4.4 アイソスピン不変性

アイソスピンを使う利点の1つは、陽子と中性子を統一的に扱えることにある。より重要なことは、核子間にはたらく核力が**アイソスピン不変性** (isospin invariance) という性質を持つことである。核子1と2の間にはたらく核力を  $V(1, 2)$  とすると、アイソスピン不変性とは、

$$[V, \mathbf{T}] = 0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \quad (24)$$

である。アイソスピン  $\mathbf{T}$  と交換する演算子を**アイソスカラー** (isoscalar) と呼び<sup>2</sup>、核力  $V$  はアイソスカラーである。2核子系の全アイソスピンの固有状態は、

$$T_+ |T M_T\rangle = \sqrt{T(T+1) - M_T(M_T+1)} |T M_T+1\rangle, \quad T_+ = T_1 + iT_2 \quad (25)$$

を満たすから、

$$\langle T M_T+1 | V | T M_T+1 \rangle = \frac{\langle T M_T | T_- V T_+ | T M_T \rangle}{T(T+1) - M_T(M_T+1)} \quad (\because T_+^\dagger = T_-) \quad (26)$$

となる。 $V$  と  $T_-$  は交換するから  $T_- V T_+ = V T_- T_+$  であり、 $T_- T_+ = \mathbf{T}^2 - T_3(T_3+1)$  であるので、

$$\langle T M_T+1 | V | T M_T+1 \rangle = \frac{\langle T M_T | V (\mathbf{T}^2 - T_3(T_3+1)) | T M_T \rangle}{T(T+1) - M_T(M_T+1)} = \langle T M_T | V | T M_T \rangle \quad (27)$$

である。したがって、アイソスピン3重項の陽子-陽子、陽子-中性子、中性子-中性子にはたらく核力の期待値は同じである。ただし、 $T=0$  と  $T=1$  の陽子-中性子の核力が同じであるとはいえない(後で見るように、核力は異なる)。

核子1と核子2の間にはたらくクーロンポテンシャル  $V_C$  は、核子  $i$  の  $t$  の第3成分を  $(t_i)_3$  として、

$$V_C(r) = \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - (t_1)_3 \right) \left( \frac{1}{2} - (t_2)_3 \right) \quad (28)$$

と表される。 $V_C$  は  $T_3$  とは交換するが、 $T_1, T_2$  とは交換しないからアイソスカラーではない。また、陽子と中性子の質量は若干異なる。したがって、 $A$ 核子系のハミルトニアン  $H$  は厳密にはアイソスカラーではない。しかし、クーロン力は核力に比べれば弱く、また陽子と中性子の質量差は小さいので、第0近似ではこれらの影響は無視出来ると考えられる。この場合、 $H$  は  $A$ 核子系の全アイソスピン  $\mathbf{T}$  と交換する。

$$[H, \mathbf{T}] = 0, \quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^A \mathbf{t}_i \quad (29)$$

式(29)が成り立つとき、 $H, \mathbf{T}^2, T_3$  の同時固有状態が存在する。 $T_3$  は個々の核子の  $t_3$  の和であり、 $Z$ 個の陽子と  $N$ 個の中性子からなる原子核の場合、 $T_3$  の固有値  $M_T$  は、

$$M_T = \frac{1}{2}(N - Z) \quad (30)$$

になる。

ハミルトニアン  $H$  が式(29)を満たす場合、 $H$  の固有値は  $M_T$  によらない。つまり、 $A = N + Z$  が同じで  $N, Z$  が異なる原子核のエネルギー準位(スペクトル)を比較すると、 $M_T$  以外の量子数が同じ状態は縮退する。図1は  $T=1$  状態のエネルギー準位の実験値である<sup>3</sup>。同じ角運動量とパリティの状態が破線で結んであり、式(29)が良い近似で成り立っていることが分かる。

<sup>2</sup>空間回転に関して不変、つまり角運動量と交換する演算子をスカラー演算子と呼ぶのと同様である。

<sup>3</sup>図の最低エネルギー準位は実際には  $E(^{14}\text{N}) - E(^{14}\text{C}) = 1.64 \text{ MeV}$ 、 $E(^{14}\text{O}) - E(^{14}\text{N}) = 2.33 \text{ MeV}$  だけずれている。このずれは中性子と陽子の質量差 ( $1.29 \text{ MeV}/c^2$ )、および陽子数の違いによるクーロンエネルギーの差として理解できる。

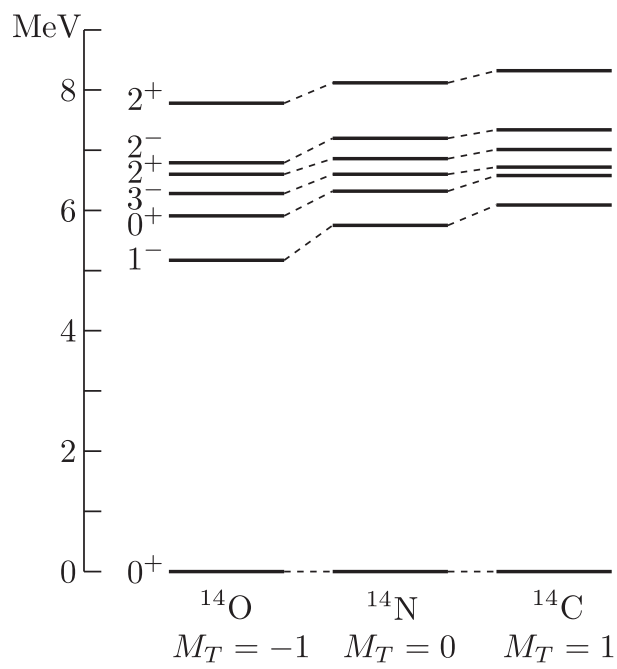


図1:  $A = 14$  原子核の  $T = 1$  状態のエネルギー準位。最低エネルギー状態が揃えられている。

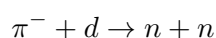
## 演習問題 4

1. 2核子系としては、

陽子-陽子、陽子-中性子、中性子-中性子

の3種類の組合せがある。各々の全アイソスピン  $T$  とその第3成分  $T_3$  を求めよ。

2. 陽子 ( $p$ ) と中性子 ( $n$ ) の束縛系が重陽子 ( $d$ ) である。重陽子にパイ中間子 ( $\pi^-$ ) なる粒子を吸収させると、パイ中間子原子が生成される (電子の代わりにパイ中間子が重陽子の周りをまわる)。パイ中間子原子では、パイ中間子は最低エネルギーである軌道角運動量 0 の軌道を占める。これは最終的には2個の中性子に崩壊する。



- (a)  $\pi^-$  のパリティを  $P_\pi$  とした時、この反応の始状態の全角運動量とパリティを求よ。ただし、 $\pi^-$  のスピンは0であること、並びに重陽子のスピン・パリティが  $1^+$  である事は知られているものとする。
- (b) 終状態のみについて考えて、その全スピンと軌道角運動量の間関係を述べよ。
- (c) 反応の前後で全角運動量が保存される事から、終状態がとり得る可能な全スピンと軌道角運動量の組合せを全て記せ。
- (d) 以上より、反応の前後で系のパリティが保存するとして、 $P_\pi$  を求めよ。

### 計算・メモ用余白