

5 重陽子と核力

原子核が安定に存在するためには、核子同士を結び付けている力（核力）が本質的である（さもなくば陽子間の電氣的斥力でバラバラになる）。この核力の性質は、真空中で核子同士を衝突させ、量子力学的断面積を測定することにより明らかにされる。核力は電子間に働くクーロン力（電磁氣力）とは違って、単に強いだけでなく複雑な形・性質を持つ事が分かっている。例えば、核力は相対距離だけではなく、核子のスピン状態等にも強く依存する（**状態依存性**）。

ここではまず、一番単純な原子核である重陽子（deuteron）の性質から、核力の大きな性質について見ていく。

5.1 重陽子の性質

重陽子は陽子1個と中性子1個からなる原子核で、以下のような性質を持っている。

束縛状態 2核子系では、重陽子（陽子と中性子）のみが束縛し、陽子同士、中性子同士は束縛しない。

結合エネルギー (binding energy) 重陽子はただ1つの束縛状態（基底状態）を持つ（つまり励起状態が存在しない）。重陽子を、構成する陽子と中性子にバラバラにするのに必要なエネルギーを結合エネルギー B_d と呼び、

$$B_d = -[m_d - (m_p + m_n)] = 2.225\text{MeV} \quad (1)$$

である。ここで m_d 、 m_p 、 m_n は各々、重陽子、陽子、中性子の質量である。

スピン・パリティ 静止した原子核全体が持つ角運動量 J を**核スピン**、または混乱の無い場合は単に**スピン**という。またパリティ π は空間反転 ($\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}$) 対称性を示す量子数 (対称なら +、反対称なら -) である。これらはまとめて J^π と表記される。重陽子については $J^\pi = 1^+$ である。

アイソスピン 重陽子のアイソスピン (陽子と中性子の合成アイソスピン) は $T = 0$ (当然 $T_3 = 0$) である。

電磁氣的観測量 一般に、原子核の構造を調べるのに電磁相互作用がよく用いられる。特に、原子核の基底状態の電氣的・磁氣的モーメント（電氣的・磁氣的多重極演算子の期待値）は、原子核の形状や核スピンの情報を与える為重要である。重陽子に対しては以下のモーメントが観測されている。

磁気モーメント $\mu_d = 0.857\mu_N$ 。この値は、陽子と中性子それぞれの磁気モーメントを単純に足した値、

$$\mu_p + \mu_n = \left(\frac{g_p}{2} + \frac{g_n}{2}\right)\mu_N = \frac{5.585 - 3.826}{2}\mu_N = 0.880\mu_N \quad (2)$$

にかなり近い。

電氣四重極モーメント $Q_d = 0.286\text{fm}^2$ 。この値は、実験的に分かっている重陽子の広がり（大きさ） $R_d^2 \gtrsim 10\text{fm}^2$ に比べると非常に小さい（つまり重陽子はほぼ球形と考えられる）。

5.2 重陽子の波動関数

重陽子は2核子系の1つ(唯一の束縛状態)であり、アイソスピンまで含めた時、完全反対称の波動関数を持つ。簡単のため核力を中心力(核子間距離だけに依存)とすると、そのポテンシャルは $V(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|)$ と書け、ハミルトニアンは、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_p}\Delta_p - \frac{\hbar^2}{2m_n}\Delta_n + V(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|) \quad (3)$$

となる。これは古典力学の時と同様に重心 \mathbf{R} と相対 \mathbf{r} の運動に分離できる。

$$\mathbf{R} = \frac{m_p\mathbf{r}_p + m_n\mathbf{r}_n}{m_p + m_n}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p \quad (4)$$

に対して、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r + V(r) \quad (5)$$

となり、

$$\text{全質量 } M = m_p + m_n, \quad \text{換算質量 (reduced mass) } \mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \quad (6)$$

である。重陽子の場合、 $m_p \simeq m_n$ なので、 $m_p = m_n \equiv m_N$ (m_N は核子の質量) とすると、

$$\text{全質量 } M = 2m_N, \quad \text{換算質量 (reduced mass) } \mu = \frac{m_N}{2} \quad (7)$$

となる。

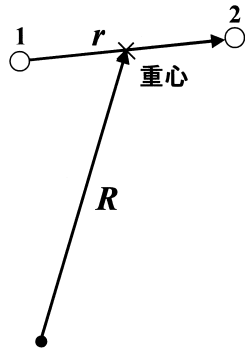


図1: 重心座標 \mathbf{R} と相対座標 \mathbf{r} 。

重心運動は自由運動をするので、2核子系そのものを問題にする場合は重心運動は無視すればよく、2核子系の重心を原点にとる事ができる。そのとき、相対運動量を \mathbf{p} 、重心の周りの全軌道角運動量を \mathbf{L} として、

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{L} \quad (8)$$

である。

表現 $\{\mathbf{R}, \mathbf{r}\}$ におけるシュレディンガー方程式は、

$$\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r + V(r) \right) \right] \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \quad (9)$$

と書かれる。この方程式は、

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r}) \quad (10)$$

という形の解（の完全系）を持つ。ここで $\Phi(\mathbf{R})$ と $\varphi(\mathbf{r})$ はそれぞれ分離した方程式、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R\right)\Phi(\mathbf{R}) &= E_R\Phi(\mathbf{R}) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r + V(r)\right)\varphi(\mathbf{r}) &= E_r\varphi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (11)$$

の解である。系全体のエネルギーは部分系の固有エネルギーの和

$$E = E_R + E_r \quad (12)$$

である。

以上から、2核子系の問題は、実際上ポテンシャル $V(r)$ 内での1粒子問題に帰着する。いつものように極座標を用いて動径と角度部分に分離すれば、動径方向の方程式は、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{L(L+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right] R_{nL}(r) = E_{nL} R_{nL}(r) \quad (13)$$

と表される。また、 $\chi_{nL}(r) = r R_{nL}(r)$ なる $\chi_{nL}(r)$ に対しては、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{L(L+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right] \chi_{nL}(r) = E_{nL} \chi_{nL}(r) \quad (14)$$

となる。ここで、 $L(L+1)\hbar^2/2\mu r^2$ は遠心力ポテンシャルであり、 L が小さいほうが束縛し易い（固有エネルギーが低い）ことを示している。

実際には2核子系の場合には、以前行ったようにスピン・アイソスピンの自由度を考慮する必要がある。ここで、

合成スピン $S = s_1 + s_2$; $S = 1$ (3重項)、 0 (1重項)

合成アイソスピン $T = t_1 + t_2$; $T = 1$ (3重項)、 0 (1重項)

である。重心の回りの全角運動量は、全軌道角運動量 L と全スピン角運動量 S の和 $J = L + S$ であり、角運動量の合成則より、

$$S = 0(\mathbf{1重項}) \quad J = L(L = 0, 1, 2, \dots)$$

$$S = 1(\mathbf{3重項}) \quad J = 1(L = 0), \quad J = L \pm 1, L(L \geq 1)$$

である。従って、スピン・アイソスピン自由度まで考慮した波動関数(状態)は、

$$\varphi_{nLJM}^{STM_T}(\mathbf{r}) = R_{nLJ}(r) \mathcal{Y}_{JM}^{(LS)}(\theta, \phi) \cdot \underbrace{|TM_T\rangle}_{\text{アイソスピン}} \quad (15)$$

となる。ここで、軌道角運動量 L と全スピン角運動量 S を合成した波動関数

$$\mathcal{Y}_{JM}^{(LS)}(\theta, \phi) = \sum_{M_L M_S} \langle LM_L SM_S | JM \rangle Y_{LM_L}(\theta, \phi) |SM_S\rangle \quad (16)$$

は S 階のテンソル球面調和関数 ($S = 1$ はベクトル球面調和関数、 $S = 1/2$ はスピノル球面調和関数) と呼ばれ、角度とスピン角運動量の関数であり、次の直交性を満たす。

$$\int d\Omega \left[\mathcal{Y}_{JM}^{(LS)}(\theta, \phi) \right]^* \left[\mathcal{Y}_{J'M'}^{(L'S')}(\theta, \phi) \right] = \delta_{LL'} \delta_{SS'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (17)$$

ただし、左辺はスピン角運動量状態 (波動関数) についても内積をとっていることに注意。

さて核子の統計性 (フェルミ・ディラック統計) から、核子 $1 \rightleftharpoons 2$ の入れ換えに対して反対称でなければならない。2つの粒子の交換演算子 P に対して重心是不変であるから、重心はやはり考慮する必要はない。他方、相対座標は交換演算に対して、

$$P_r \mathbf{r} = -\mathbf{r} \quad (18)$$

であるので、パリティ演算 (空間反転) と同じになることに注意する。球面調和関数 $Y_{LM}(\theta, \phi)$ の性質から、

$$P_r Y_{LM}(\theta, \phi) = Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-)^L Y_{LM} \quad (19)$$

であるので、上記の波動関数は相対座標の交換 P_r に対して固有状態になっており、その固有値は $(-)^L$ であることがわかる。他方、粒子の統計性に関する議論から、上記の波動関数はスピン・アイソスピンの交換演算子 P_S 、 P_T に対して固有状態になっている。その固有値は、

$$P_S \Rightarrow (-)^{S+1}, \quad P_T \Rightarrow (-)^{T+1} \quad (20)$$

であることを思い出そう。

以上から、粒子の交換 $P = P_r \cdot P_S \cdot P_T$ に対して完全反対称

$$P \varphi_{nLJM}^{STM_T}(\mathbf{r}) = (-)^{L+S+T+1} \varphi_{nLJM}^{STM_T}(\mathbf{r}) = -\varphi_{nLJM}^{STM_T}(\mathbf{r}) \quad (21)$$

となるための条件は次のようにまとめられる。

$$\text{完全反対称} \Rightarrow L + S + T = \text{奇数、かつ、パリティ}(\pi) = (-)^L \quad (22)$$

すなわち、

アイソスピン T	スピン角運動量 S	軌道角運動量 L	パリティ π
$T = 0$	$S = 0$ [1 重項 (Singlet)]	$L = 1, 3, 5, \dots$	$\pi = -$ [奇 (Odd)]
	$S = 1$ [3 重項 (Triplet)]	$L = 0, 2, 4, \dots$	$\pi = +$ [偶 (Even)]
$T = 1$	$S = 0$ [1 重項 (Singlet)]	$L = 0, 2, 4, \dots$	$\pi = +$ [偶 (Even)]
	$S = 1$ [3 重項 (Triplet)]	$L = 1, 3, 5, \dots$	$\pi = -$ [奇 (Odd)]

とまとめられる。

このような2核子状態を、

$$^{2S+1}L_J, \quad L = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow S, P, D, \dots \quad (23)$$

と表現する。例えば、

$^3\mathbf{S}_1$ $S = 1, L = 0, J = 1$ 状態 (Triplet-S-One と読む)

$^3\mathbf{D}_1$ $S = 1, L = 2, J = 1$ 状態 (Triplet-D-One と読む)

である。

重陽子の場合、スピン・パリティは $J^\pi = 1^+$ 、アイソスピンは $T = 0$ であるから、

重陽子: 3S_1 または 3D_1 ($S = 1, L = 0$ または 2)

である。

5.3 核力の一般形

現在では核子はクォーク 3つ（中間子はクォーク・反クォークの 2つ）から構成されており、核力はクォークの理論である**量子色力学 (QCD)** から原理的には求められる（クォーク間の力はグルーオン交換で与えられる）。しかしながら、現在でも QCD から実際の核力を求めるのは極めて難しい問題である。

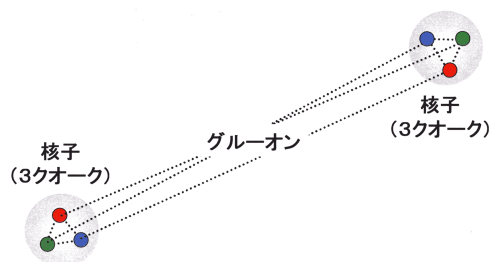


図 2: クォーク・グルーオン描像から見た、核子と核力の概念図。

そこで、ここでは核力の満たすべき性質から出発し、実際の現象を説明するにはどうあるべきであるかを考える、**現象論的な核力**を概観する。

基本的対象性等の要求から核力の関数形を決定し、その大きさについては実際の現象（実験事実）を再現するように求める。

以下に見るように、現実の核力はクーロン力（電磁気力）等と異なって複雑である。そこでまず一般的な仮定から出発して、どのような形（関数形）が許されるのかを調べる。次の 2つの仮定をおく。

仮定 (A) 核子は点粒子として（少なくとも低エネルギー領域では）非相対論的に扱うことが可能で、働く力は（近似的に）局所ポテンシャルで書ける（ \Rightarrow 運動量・エネルギー依存性は小さい）。

仮定 (B) 相互作用のポテンシャルは以下の基本的対称性（不変性）を満たす。

1. 粒子の統計性（2つの粒子の入れ換えに対して不変）
2. 並進不変性
3. 回転不変性
4. 空間反転（パリティ）不変性
5. 時間反転不変性
6. アイソスピン不変性（荷電対称性）

最後の 3つをまとめたものを、**ChargeParityTime 不変性 (CPT 不変性)** という。CPT 不変性は一般に成り立っているが、個々の不変性が成り立つかは相互作用に依存する（例えば弱い相互作用は P 不変性を破る）。

電磁場の場合のベクトルポテンシャルに関係する量（磁気的な力を引き起こす）のように、一般に相互作用のポテンシャルは運動量に依存してもよい。さらに、一般のポテンシャルは時間的にも空間的にも**非局所的 (non-local)** であり、エネルギーや運動量の冪級数で展開される（本講義の範囲を超えるので、ここではこれ以上立ち入らない）。“仮定 (A)” は運動量への依存性が小さいことを意味し、このことから運動量で展開した最低次（1次）まで考慮する。また対称性 1.-3. からポテンシャルは、

相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

相対運動量 $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$

全スピン $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$

からなるスカラー演算子の関数である。さらに対称性 4. と 5. から、可能な組み合わせは非常に限定される。例えば、

	パリティ変換	時間反転
\mathbf{r}	奇関数	偶関数
\mathbf{p}	奇関数	奇関数
\mathbf{S}	偶関数	奇関数

であるので、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}$ (パリティ不変・時間反転不変を破る)、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}$ (パリティ不変を破る)、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ (時間反転不変を破る)等は許されない。またスピン演算子(パウリ演算子)に対しては、

$$s_1^2 = s_2^2 = \frac{3}{4}, \quad (\because \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 3) \quad (24)$$

であるので、2つの核子のスピン演算子については各々の1次の項のみが現れる。

以上まとめると、核力の一般系は次式で与えられる。

$$V_{NN} = V_{\text{central}}(r) + V_{\text{tensor}}(r)S_{12} + V_{LS}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + (\mathbf{p}^2 \text{以上の項}) + \dots \quad (25)$$

ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ 、 \mathbf{L} は重心の回りの2核子の全軌道角運動量演算子であり、

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} (\nabla_2 - \nabla_1) \quad (26)$$

である。また S_{12} はテンソル演算子と呼ばれ、

$$S_{12} = 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (27)$$

で定義される。

第1項は**中心力 (central force)**と呼ばれ、空間座標については r のみの関数¹であり、軌道角運動量を保存する ($\leftrightarrow \mathbf{L}$ と交換する)。この項は核力の最も重要な寄与を与える。第2・第3項はこれに対して、軌道角運動量を保存しない非中心力であり、第2項は(運動量に依存しない)**テンソル力 (tensor force)**、第3項は(運動量の1次の項である)**スピン軌道力 (spin-orbit force)**と呼ばれる。これらの項は中心力に比べればその寄与は小さいが、原子核や核力を考える上では非常に重要である(例えば、2核子系で陽子-中性子のみが束縛状態を持つ(重陽子を形成する)のはテンソル力による)。

以下で、各項についてもう少し詳しく見ていく。

中心力

中心力は軌道角運動量演算子 \mathbf{L} と交換するスカラー演算子からなる。核子の場合にはスピン・アイソスピンの自由度があるが、スピンについては**回転不変性**から通常空間でのスカラー演算子、アイソスピンについては**荷電不変性**からアイソスピン空間でのスカラー演算子でなければならない。

¹後述の通り、中心力はスピン・アイソスピンの関数である

さらに、他の対称性を用いるとそれらは (パウリ行列を用いて) $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ と $\tau_1 \cdot \tau_2$ の組み合わせしかない。従って、中心力は、

$$V_{\text{central}}(r) = V_0(r) + V_\sigma(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + V_\tau(r)(\tau_1 \cdot \tau_2) + V_{\sigma\tau}(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) \quad (28)$$

と書き表される。ここで、 $V_0(r), V_\sigma(r), V_\tau(r), V_{\sigma\tau}(r)$ は、すべて r のみの通常のポテンシャル (例えば湯川関数) である。

2核子系の波動関数を式 (15) とすると、合成スピン S と合成アイソスピン T の値に応じて

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = 2S^2 - 3 = \begin{cases} -3 & (S = 0) \\ +1 & (S = 1) \end{cases}, \quad (\tau_1 \cdot \tau_2) = 2T^2 - 3 = \begin{cases} -3 & (T = 0) \\ +1 & (T = 1) \end{cases} \quad (29)$$

の値をとる。すなわち核力 V_{NN} は2核子のスピン・アイソスピン状態に強く依存する (**核力の状態依存性**)。重陽子の性質から、 $T = 0$ の2核子系は束縛するが、 $T = 1$ の系は束縛しない。このことから、**アイソスピン依存項** ($(\tau_1 \cdot \tau_2)$ の項) は必ず存在しなければならないことに注意せよ。

さて、スピン・アイソスピンのパウリ行列で表現された上の形は、交換力 (exchange force) という別の形で書くことができる。以前の講義でやったように、スピン・アイソスピン自由度に対する粒子の交換演算子 P_S, P_T はパウリ行列を用いて、

$$P_S = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2), \quad P_T = \frac{1}{2}(1 + \tau_1 \cdot \tau_2) \quad (30)$$

と書ける。この式から、 $(\sigma_1 \cdot \sigma_2), (\tau_1 \cdot \tau_2)$ を P_S, P_T で表し、

$$P_{\text{total}} = P_r \cdot P_S \cdot P_T = -1 \Rightarrow P_T = -P_S \cdot P_r \quad (31)$$

として、空間座標・スピン交換の演算子 P_r, P_S で表すと、

$$V_{\text{central}}(r) = V_W(r) + V_B(r)P_S + V_M(r)P_r + V_H(r)P_S P_r \quad (32)$$

と表される。それぞれの項はその交換力の提唱者の名前をとって、Wingner、Bartlet、Majorana、Heisenberg の相互作用と呼ばれる。

また別の表現として、2核子状態を $^{2S+1}L_J$ 状態と呼ぶことに対応する形にも書ける。 L の偶奇がパリティに対応し、スピン状態の1重項・3重項と合わせて、

1重偶 (Singlet Even) $S = 0$ (singlet), $L = \text{even}$ ($\pi = +$) $\Rightarrow T = 1$

1重奇 (Singlet Odd) $S = 0$ (singlet), $L = \text{odd}$ ($\pi = -$) $\Rightarrow T = 0$

3重偶 (Triplet Even) $S = 1$ (triplet), $L = \text{even}$ ($\pi = +$) $\Rightarrow T = 0$

3重奇 (Triplet Odd) $S = 1$ (triplet), $L = \text{odd}$ ($\pi = -$) $\Rightarrow T = 1$

と分類される。スピン・アイソスピンの射影演算子は、

$$\mathcal{P}_{ST} = \frac{1}{2}(1 - (-)^S P_S) \frac{1}{2}(1 - (-)^T P_T) \quad (33)$$

と表されるので、スピン・アイソスピン射影演算子を用いた表現は、

$$V_{\text{central}}(r) = V_{\text{SE}}(r)\mathcal{P}_{01} + V_{\text{SO}}(r)\mathcal{P}_{00} + V_{\text{TE}}(r)\mathcal{P}_{10} + V_{\text{TO}}(r)\mathcal{P}_{11} \quad (34)$$

となる。

テンソル力

テンソル力 $V_T(r)S_{12}$ は、運動量によらない唯一の非中心力であり、スピンを持った粒子の間に働く。テンソル演算子 S_{12} は、

$$\begin{aligned} S_{12} &= 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\ &= \frac{3}{r^2} \sum_{ij} \left(x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) \sigma_{1;i} \sigma_{2;j}, \quad (i, j = x, y, z) \end{aligned} \quad (35)$$

であるが、パウリ行列とテンソル和をとる部分が2階の慣性テンソルの形をしていることからテンソル演算子と呼ばれる。

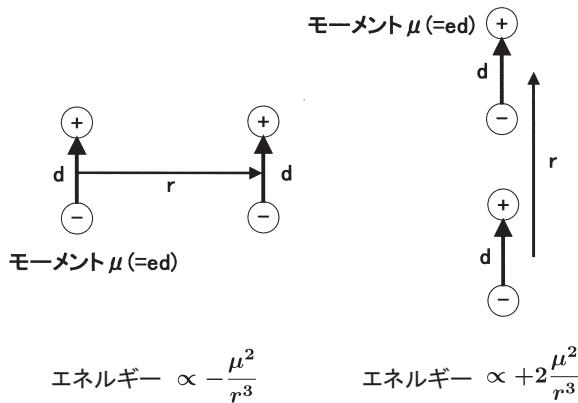


図3: 双極子相互作用の例。同じようにスピンの整列しても、両者のエネルギーは符号を含めて異なる。

例えば、 $V_T = e^2/r^2$ とすると、この力は2つの電気双極子 ($e\boldsymbol{\sigma}_1, e\boldsymbol{\sigma}_2$) の間に働く力のポテンシャルと同じ形である。

また S_{12} は、

$$S_{12} = 2 \left[3 \left(\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}}{r} \right)^2 - \mathbf{S}^2 \right] \quad (36)$$

とも表す事ができるので、

$$[\mathbf{J}, S_{12}] = 0, \quad [\mathbf{S}^2, S_{12}] = 0, \quad [\mathbf{L}^2, S_{12}] \neq 0, \quad [L_z, S_{12}] \neq 0, \quad [S_z, S_{12}] \neq 0, \quad (37)$$

が分かり、非中心力である事が分かる。また、上記の S_{12} の式から、明らかに合成スピン $S = 0$ の状態に対して $S_{12}|S = 0\rangle = 0$ であるので、**テンソル力は合成スピン $S = 1$ の状態にしか効かない**。すなわちテンソル力は、

$$V_T(r) = V_{T0}(r) + V_{T\tau}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \quad (38)$$

の形でアイソスピンのみによる。

ところでテンソル力はスピン状態については常に3重項 (triplet) 状態であるので、パリティとアイソスピン状態については完全反対称化の要請から、

テンソル偶 (Tensor Even) $L = \text{even} (\pi = +) \Rightarrow T = 0$

テンソル奇 (Tensor Odd) $L = \text{odd} (\pi = -) \Rightarrow T = 1$

と分類される。従って、アイソスピン射影演算子 \mathcal{P}_T 、

$$\mathcal{P}_T = \frac{1}{2}(1 - (-)^T P_T) \quad (39)$$

を用いると、アイソスピン射影演算子を用いた表現は、

$$V_{\text{tensor}}(r) = V_{\text{TNE}}(r)\mathcal{P}_0 + V_{\text{TNO}}(r)\mathcal{P}_1 \quad (40)$$

となる。

テンソル力が非中心力であるということは、2核子系のエネルギーの固有状態には複数の相対軌道角運動量 L が混ざっている² ということである (合成スピンの大きさ S は保存する)。すなわち、

$$\varphi_{nJM}^{(STM_T)}(\mathbf{r}) = \sum_L c_{nLJ} R_{nLJ}(r) \mathcal{Y}_{JM}^{(LS)}(\theta, \phi) \cdot |TM_T\rangle \quad (41)$$

と表される。ここで、重ね合わせの係数 c_{nLJ} は2核子系のシュレディンガー方程式を解くことにより得られる。

以下、重陽子の基底状態 (添字を省略して φ_d と表記) を考える。もし中心力しかなければ、遠心力ポテンシャルのため、エネルギーが最低の基底状態は $L=0$ の S 状態である。重陽子の性質から $J=S=1$ であるので、 $L=0$ または2である ($L=1$ はパリティが異なる) から、 D 状態 ($L=2$) が混じるとすればテンソル力が存在するためである。

$$\varphi_d = \varphi_{dS} + \varphi_{dD} \quad (42)$$

ここで

$$\begin{aligned} \varphi_{dS} &= \frac{u(r)}{r} \mathcal{Y}_{1M}^{(01)}(\theta, \phi) \\ \varphi_{dD} &= \frac{w(r)}{r} \mathcal{Y}_{1M}^{(21)}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (43)$$

である。規格化の条件 ($\mathcal{Y}_{JM}^{(LS)}$ 関数の直行性に注意) から、

$$\int_0^\infty [u^2(r) + w^2(r)] dr = 1 \quad (44)$$

であるので、 D 状態の混じる確率は、

$$P_D = \int_0^\infty w^2(r) dr \quad (45)$$

で与えられる。

ここで、重陽子とそれを構成する核子の電磁氣的性質から、 P_D を見積もってみよう。陽子の軌道運動の磁気モーメントへの寄与は、軌道角運動の g -因子が1であることを思い出すと、

$$\frac{1}{2} \mathbf{L} \mu_N \quad (\mu_N \text{ は核磁子}) \quad (46)$$

である³。従って、重陽子の磁気双極演算子 $\boldsymbol{\mu}_d$ は、陽子・中性子の g -因子並びにスピンを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\mu}_d}{\mu_N} &= g_p \mathbf{s}_p + g_n \mathbf{s}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L} \\ &= \frac{1}{2} (g_p + g_n) \mathbf{S} + \frac{1}{2} \mathbf{L} + \frac{1}{2} (g_p - g_n) (\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_n) \\ &= \frac{1}{2} (g_p + g_n) \mathbf{J} + \frac{1}{2} (1 - g_p - g_n) \mathbf{L} + \frac{1}{2} (g_p - g_n) \underbrace{(\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_n)}_{S=1 \rightarrow \text{期待値 } 0} \end{aligned} \quad (47)$$

² L は良い量子数ではない

³ 中性子は電荷を持たないので、軌道運動の寄与は0

と表される。スピンについては $S = 1$ の対称状態で期待値をとるので、最後の項は効かず以下では無視する。

さて、磁気モーメントは \mathbf{J} の方向を z -軸にとり、 $J = M = 1$ の状態 ($\rangle_{J=1, M=1}^{(L, S=1)}$) で上の磁気双極子演算子 μ_d の z -成分、

$$\frac{\mu_{d,z}}{\mu_N} = \frac{J_z}{\mathbf{J}^2} \mu_d \cdot \mathbf{J} = \frac{J_z}{\mathbf{J}^2} \left[\frac{1}{2}(g_p + g_n)\mathbf{J}^2 + \frac{1}{2}(1 - g_p - g_n)\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \right] \quad (48)$$

の期待値 ($\langle * \rangle_{J=1, M=1}^{(L, S=1)}$) をとったものである。

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} = \frac{\mathbf{J}^2 + \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2}{2} \quad (49)$$

に注意すると、

$$\frac{\mu_{d,z}}{\mu_N} = \frac{J_z}{\mathbf{J}^2} \left[\frac{1}{4}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{S}^2) + \frac{1}{4}(g_p + g_n)(\mathbf{J}^2 + \mathbf{S}^2) + \frac{1}{4}(1 - g_p - g_n)\mathbf{L}^2 \right] \quad (50)$$

である。ここで、

$$\langle \mathbf{J}^2 \rangle_{11}^{(01)} = \langle \mathbf{S}^2 \rangle_{11}^{(01)} = 2u^2, \quad \langle \mathbf{J}^2 \rangle_{11}^{(21)} = \langle \mathbf{S}^2 \rangle_{11}^{(21)} = 2w^2, \quad \langle \mathbf{L}^2 \rangle_{11}^{(01)} = 0, \quad \langle \mathbf{L}^2 \rangle_{11}^{(21)} = 6w^2 \quad (51)$$

である ($u^2 = \int_0^\infty u^2(r)dr$) ので、 $u^2 + w^2 = 1$ に注意すると、

$$\frac{\mu_{d,z}}{\mu_N} = \frac{1}{2}(g_p + g_n) + \frac{3}{4}(1 - g_p - g_n)P_D \quad (52)$$

となる。重陽子の μ_d の値と、陽子・中性子の g -因子の値を使うと $P_D \simeq 0.04$ と求められる。すなわち、 **D 波混合の確率は高々4%程度である**ことがわかる。

$\mu_d = 0.857$ 、 $g_p = 5.586$ 、 $g_n = -3.826$ であるので、

$$P_D = \frac{4\mu_d - 2(g_p + g_n)}{3(1 - g_p - g_n)} \simeq 0.04. \quad (53)$$

電気四重極モーメントの場合は、演算子、

$$Q_d \propto 3z^2 - r^2 = 2z^2 - x^2 - y^2 \quad (54)$$

は陽子の空間分布が球対称な S 状態では期待値は0であるので、重陽子の電気四重極モーメントが0でないという実験事実はやはり D 状態混合の証拠である。 D 状態混合の確率 P_D は小さいので、観測された電気四重極モーメント値自身も小さく、

$$\langle Q_d \rangle = 2\langle S|Q_d|D \rangle + \langle D|Q_d|D \rangle = 0.286 \text{ fm}^2 \ll R_d^2 \simeq 10 \text{ fm}^2. \quad (55)$$

また、 Q の符号が正であることから、テンソル演算子の性質を考えると係数 $V_T < 0$ (正確には $V_{\text{TNE}} < 0$) で引力である。

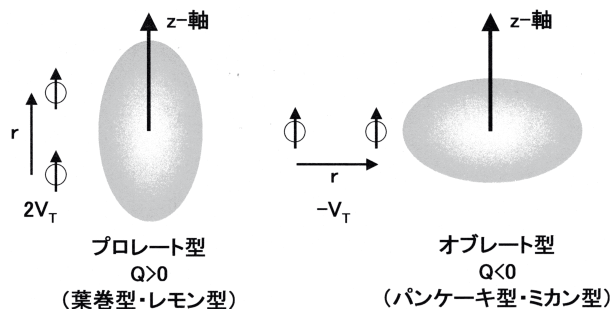


図4: Q -モーメントと原子核の形状の関係。重陽子の Q は正であるので、プロレート型である。従って $V_T < 0$ である。

スピン軌道力 (LS 力)

スピン軌道力 $V_{LS}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ は運動量の 1 次比例する唯一の中心力である。テンソル力と同様に、スピン軌道力は合成スピン $S = 1$ の状態にしか効かない ($\because \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | S = 0 \rangle = 0$)。

すなわちスピン軌道力は、

$$V_{LS}(r) = V_{LS0}(r) + V_{LS\tau}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \quad (56)$$

の形でアイソスピンのみによる。

ところでスピン軌道力はスピン状態については常に 3 重項 (triplet) 状態であるので、パリティとアイソスピン状態については完全反対称化の要請から、

$$\text{スピン軌道 偶 (LS Even) } L = \text{even } (\pi = +) \Rightarrow T = 0$$

$$\text{スピン軌道 奇 (LS Odd) } L = \text{odd } (\pi = -) \Rightarrow T = 1$$

と分類される。従って、アイソスピン射影演算子 \mathcal{P}_T 、

$$\mathcal{P}_T = \frac{1}{2}(1 - (-)^T P_T) \quad (57)$$

を用いると、アイソスピン射影演算子を用いた表現は、

$$V_{LS}(r) = V_{LSE}(r)\mathcal{P}_0 + V_{LSO}(r)\mathcal{P}_1 \quad (58)$$

となる。

重陽子の場合、

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \quad (59)$$

に注意すると、 D 状態の混じりに対して、

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle_{11}^{(21)} = -3P_D \quad (60)$$

であるので、この項はあまり効かない。しかしながら、一般に $V_{LS}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ が運動量の 1 次比例することから、ある程度エネルギーの高い核子同士の散乱現象においては重要な役割を果たす。なぜならば、散乱の時には軌道の向きとスピンの向きがどのような関係にあるかによって、 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ の値 (符号) が異なるからである。スピンの向きによって散乱の断面積が異なる効果は、特に偏極観測量 (polarization observable) と呼ばれる物理量に現れるが、ここではその詳細には立ち入らない。

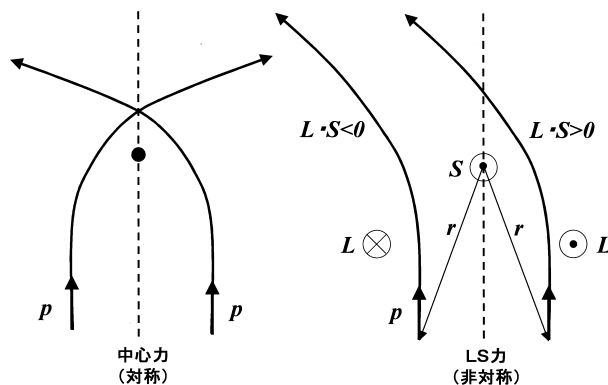


図 5: LS -力による軌道の変化の概念図。実際の軌道の変化の向きは LS -力の符号に依存する。

5.4 核力の大体の強さ

これまで、核力の形や状態依存性について見てきた。最後に重陽子の情報を元に、現実の核力の大きさについて調べてみよう。ここでは簡単のため重陽子の D 状態を無視し、 S 状態のみについて考える。

S 状態でのポテンシャルを $V_0(r)$ とすると、(相対運動に対する) シュレディンガー方程式は簡単な 1 次元の方程式の形になる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) \right] u(r) = Eu(r) \quad (61)$$

ここで簡単のため、 $V_0(r)$ として半径 a で深さ $-V_0$ の井戸型ポテンシャルを考えると、その束縛状態 ($E < 0$) の解は、

$$\begin{aligned} r \leq a : u(r) &= A \sin kr & k &= \sqrt{2\mu(V_0 + E)}/\hbar \\ r > a : u(r) &= B e^{-\kappa r} & \kappa &= \sqrt{2\mu(-E)}/\hbar \end{aligned}$$

となる。 $r = a$ での連続性に対する要求、

$$\begin{aligned} A \sin ka &= B e^{-\kappa a} \\ kA \cos ka &= -\kappa B e^{-\kappa a} \end{aligned} \quad (62)$$

から、

$$-\kappa = k \cot ka \quad (63)$$

であり、 k も κ も E の関数であるので、この式を解くことがエネルギー固有値 E を求めることに対応する。

この問題は良く知られているように、次の k と κ に対する連立方程式

$$\begin{cases} (\kappa a)^2 + (ka)^2 = (k_0 a)^2 & k_0 = \sqrt{2\mu V_0}/\hbar \\ \kappa a = -ka \cot ka \end{cases} \quad (64)$$

を解く事に帰着する。これは $(ka, \kappa a)$ 平面に各方程式を描き、その交点を求めることにより解 (束縛状態) の数は容易に求める事ができ、

$$\begin{aligned} k_0 a &< \frac{\pi}{2} && \rightarrow \text{束縛状態なし} \\ \frac{\pi}{2} &\leq k_0 a < \frac{3\pi}{2} && \rightarrow \text{1 個の束縛状態} \\ &\vdots && \\ \frac{(2n-1)\pi}{2} &\leq k_0 a < \frac{(2n+1)\pi}{2} && \rightarrow \text{n 個の束縛状態} \\ &\vdots && \end{aligned}$$

となる。

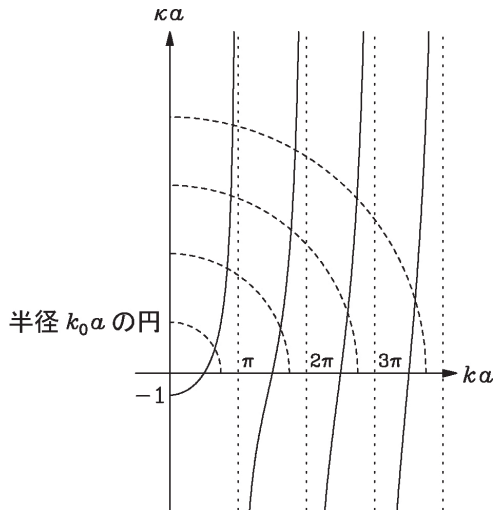


図 6: $(ka, \kappa a)$ -空間に描かれた、 $\kappa a = -ka \cot ka$ と半径 $k_0 a$ の円。交点が束縛状態の解に対応、交点の数が束縛状態の数に対応する。

重陽子は束縛状態が 1 個しかないので、ポテンシャルの深さは、

$$\frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq V_0 < \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \tag{65}$$

を満たす。左辺は $a \sim 2 \text{ fm}$ とすると約 26 MeV になるので少なくとも $V_0 \gtrsim 26 \text{ MeV}$ であることが分かる。ここで、重陽子の束縛エネルギー ($B_d = -E_d$) は約 2.2 MeV であったことを思い出そう。すなわち $B_d \ll V_0$ であり、束縛エネルギーはポテンシャルに比べてずっと小さく、かつかつで束縛していることを意味している。また、 B_d が小さいということは、外側の波動関数 $e^{-\kappa r}$ の $\kappa = \sqrt{2\mu B_d}/\hbar$ が小さいことを意味し、重陽子の広がりが大きいこと ($R_d \gtrsim 1/\kappa \sim 4.3 \text{ fm}$) を示している。

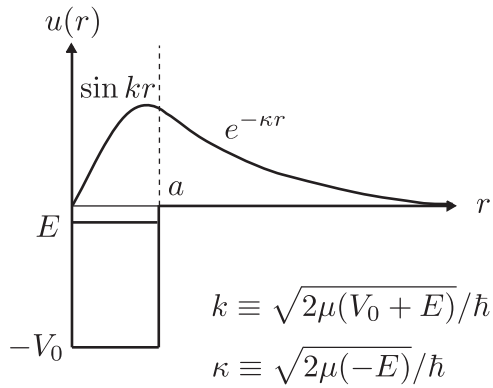


図 7: 重陽子の波動関数の概念図。波動関数がポテンシャルの外に大きくしみだしていることに注意 (重陽子の広がりに対応)。

V_0, κ を大雑把に求めてみよう。

$$\mu = \frac{m_N}{2} \sim 500 \text{ MeV}/c^2, \quad \hbar \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}/c, \quad \pi^2 \sim 10 \tag{66}$$

であるので、

$$V_0 \geq \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{200^2}{2 \cdot 500 \cdot 2^2} \frac{10}{4} = 25 \text{ MeV} \tag{67}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 500 \cdot 2}}{200} = 0.22 \text{ fm}^{-1}$$

である。

5.5 核力の間接子論と現実的核力

核力の形と π 中間子交換力

核力の形 ($V(r)$ の r -依存性) は、湯川による中間子理論を出発点として得られる。中間子 (交換) 理論は、電子の間で光子を交換することによって電磁気力が発生するという場の量子論の考えを核子間の核力に拡張してものになっている。これによって湯川は π 中間子の存在を予言し、後にそれが実験的に発見されてノーベル賞⁴につながった。

π 中間子はスピンが0、パリティ奇 (-) で、3種類の電荷 $\pm e, 0e$ を持つものが存在することから、内部対称性としてのアイソスピン $T=1$ を持つ⁵。これが核力のアイソスピン依存性の原因である。

$$\pi \text{ 中間子 } J^\pi = 0^-, m_{\pi^\pm} = 139.570 \text{ MeV}/c^2, m_{\pi^0} = 134.977 \text{ MeV}/c^2$$

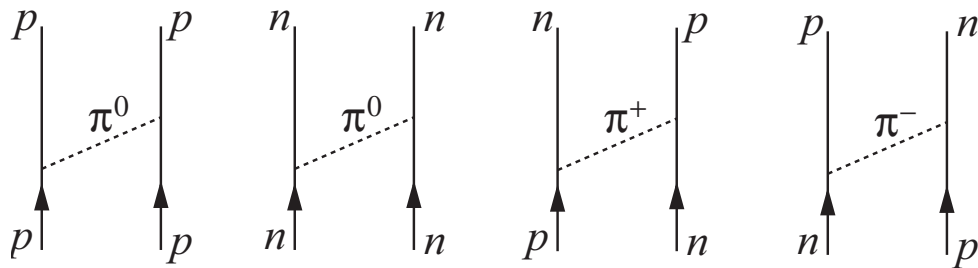


図 8: π 中間子交換 (One Pion Exchange) のファインマン図。

中間子交換による核力の導出は相対論的場の理論を用いる必要があり、本講義の範囲を超える。そこで、ここではクーロン力との類似から導いてみる。原点に点電荷 e がある場合、電磁場のスカラー・ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ は、ポアソン方程式

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -e\delta(\mathbf{r}) \quad (68)$$

から得られる。量子力学では、 $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ であるので、

$$(\mathbf{p}c)^2 V(\mathbf{r}) = (\hbar c)^2 e\delta(\mathbf{r}) \quad (69)$$

と書ける。ここで、 $(\mathbf{p}c)^2$ は (質量0の) 光子のエネルギーの2乗であるので、質量 m の中間子を交換する場合は、そのエネルギーの2乗 $[(\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2]$ で置き換えられる。また、 e は荷電粒子と光子の結合の強さを表す定数であるので、これは核子と中間子の結合の強さを表す定数 g で置き換えられる。以上から、核力の場合のポテンシャルは

$$[(\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2]V(\mathbf{r}) = (\hbar c)^2 g\delta(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad (\nabla^2 - \lambda^{-2})V(\mathbf{r}) = -g\delta(\mathbf{r}), \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (70)$$

を満たすと考えられる。ここで λ は中間子のコンプトン波長である。

⁴Nobel Prize in Physics, 1949

⁵素粒子の性質 (スピン・パリティ、質量等) は Particle Data Group(PDG) によってまとめられている。結果はインターネットでも閲覧可能で、日本では <http://ccwww.kek.jp/pdg/pdg.html> からたどることができる (世界各地にミラーサイトがある)。

方程式 (70) を解いて、核力ポテンシャルを求める。まず、 $V(\mathbf{r})$ をフーリエ変換して

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{k}) \quad (71)$$

である。またデルタ関数は、

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (72)$$

である。これらを、式 (70) に代入して、

$$(\mathbf{k}^2 + \lambda^{-2})V(\mathbf{k}) = g \quad (73)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{g}{\mathbf{k}^2 + \lambda^{-2}} \\ &= \frac{g}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{\exp(ikr \cos \theta)}{k^2 + \lambda^{-2}} \\ &= \frac{g}{4i\pi^2 r} \int_0^\infty dk k \frac{\exp(ikr) - \exp(-ikr)}{k^2 + \lambda^{-2}} \\ &= \frac{g}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \exp(ikr) \frac{k}{k^2 + \lambda^{-2}} = -\frac{g}{4\pi^2 r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\exp(ikr)}{k^2 + \lambda^{-2}} \end{aligned} \quad (74)$$

である。ここで、式 (74) の積分は留数定理を用いて、

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{\exp(ikr)}{k^2 + \lambda^{-2}} = \pi \lambda e^{-r/\lambda} \quad (75)$$

と求まる。従って、

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{g}{4\pi^2 r} \frac{d}{dr} \pi \lambda e^{-r/\lambda} = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (76)$$

を得る。 $e^{-r/\lambda}/r$ を**湯川型**という。

式 (76) は、 r の増大と共に指数関数的に減少する。 $r = \lambda$ で $e^{-r/\lambda} = e^{-1}$ であるので、力の到達範囲はコンプトン波長 λ 程度であると考えられる。 λ を具体的に計算すると、

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{140 \text{ MeV}} \simeq 1.4 \text{ fm}^{-1} \quad (77)$$

となり、 π 中間子交換力の到達範囲は 1.4 fm 程度であることが分かる。

核子と中間子の結合の強さを表す定数 g の大きさは、

$$\frac{g^2}{\hbar c} \approx 0.28 \quad (78)$$

であり、電磁場の強さを表す微細構造定数 α 、

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} = 0.0073 \quad (79)$$

に比べはるかに大きい事に注意せよ。

核力の斥力芯

実は、中心力でしかも引力のポテンシャルに対して、原子核は潰れてしまうことがわかる。定性的に説明すると、まず運動エネルギーは正であるが、ポテンシャル・エネルギーは負である。運動エネルギーは核子数に従って $\propto A$ で増えるが⁶、2核子間のポテンシャルは $\propto A C_2 \propto A(A+1)$ であるので、 A が大きくなると常に引力のポテンシャルが運動エネルギーに勝り、束縛エネルギーが ∞ になってしまう(定量的議論には、核力(ポテンシャル)の詳細が必要であり、また遠心力ポテンシャルを考慮する必要がある)。

従って、現実的核力は r が小さいところでは斥力になっており、大雑把にいて分子間力に働くポテンシャルのような形になっている(ただし、その斥力部分の大きさは非常に大きい)。

この中心付近での斥力は、核子がクォーク3つからできている効果(簡単には核子の大きさ)が見えていると考えられる。これを**斥力芯(repulsive core)**または**ハード・コア(hard core)**といい、その大雑把な半径は $r \sim 0.5 \text{ fm}$ 程度である。

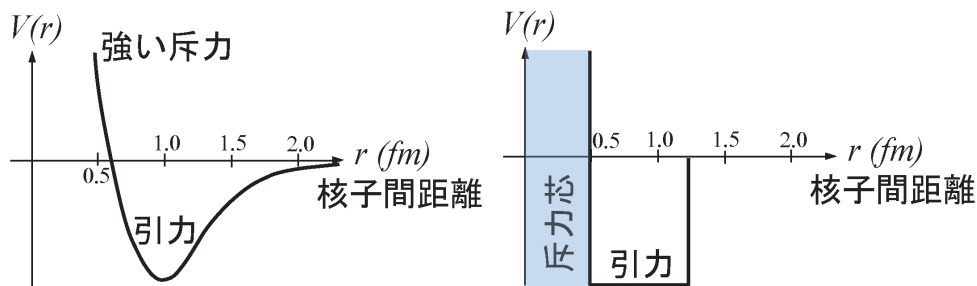


図 9: 核力の r 依存性と、簡単化されたモデル。

通常、核力を考える時には、中心から外に向かって3つの領域 I、II、III に分け、

- I. **斥力芯領域** クォークの効果(核子の大きさ)が見える領域
- II. **中間引力領域** 原子核を束縛する(π 中間子以外の中間子交換が寄与)
- III. **π 中間子交換領域** π 中間子交換が支配的

である。現在では、少なくとも II と III の領域は核子間に中間子($\pi, \sigma, \omega, \rho, \phi, \dots$)を交換して得られる力・ポテンシャルである、**中間子交換力・中間子交換ポテンシャル**で記述され、核子間の散乱実験のデータを非常によく再現する。

⁶正確には、パウリの排他律の影響により、独立粒子模型近似の下では $\propto A^{5/3}$ である。

実験値 $(x_i, y_i \pm \sigma_i)$ と理論値 $f(x_i)$ の合いの良さ (悪さ) を示す量に **chi square** χ^2

$$\chi^2 = \sum_N \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (80)$$

がある。学生実験で学んだ最小二乗法は、この χ^2 を最小にする関数 f (例えば1次式) を求めることである。 χ^2 は実験データ数 N に対する和を含むのでデータ数が多ければ一般に大きな値をとる。また理論値の計算に必要な変数の数 n が多ければ一般に小さな値をとる (データ数 $N=2$ の時、 $n=2$ (一次式) なら常に $\chi^2=0$)。そこで実験値と理論値の合いの良さを定量的に示す量として **reduced chi square**

$$\chi_{\text{reduced}}^2 = \frac{\chi^2}{N - n} \quad (81)$$

がある。最近では、 $\chi_{\text{reduced}}^2 \sim 1$ の核力 (中間子交換力) が得られている。

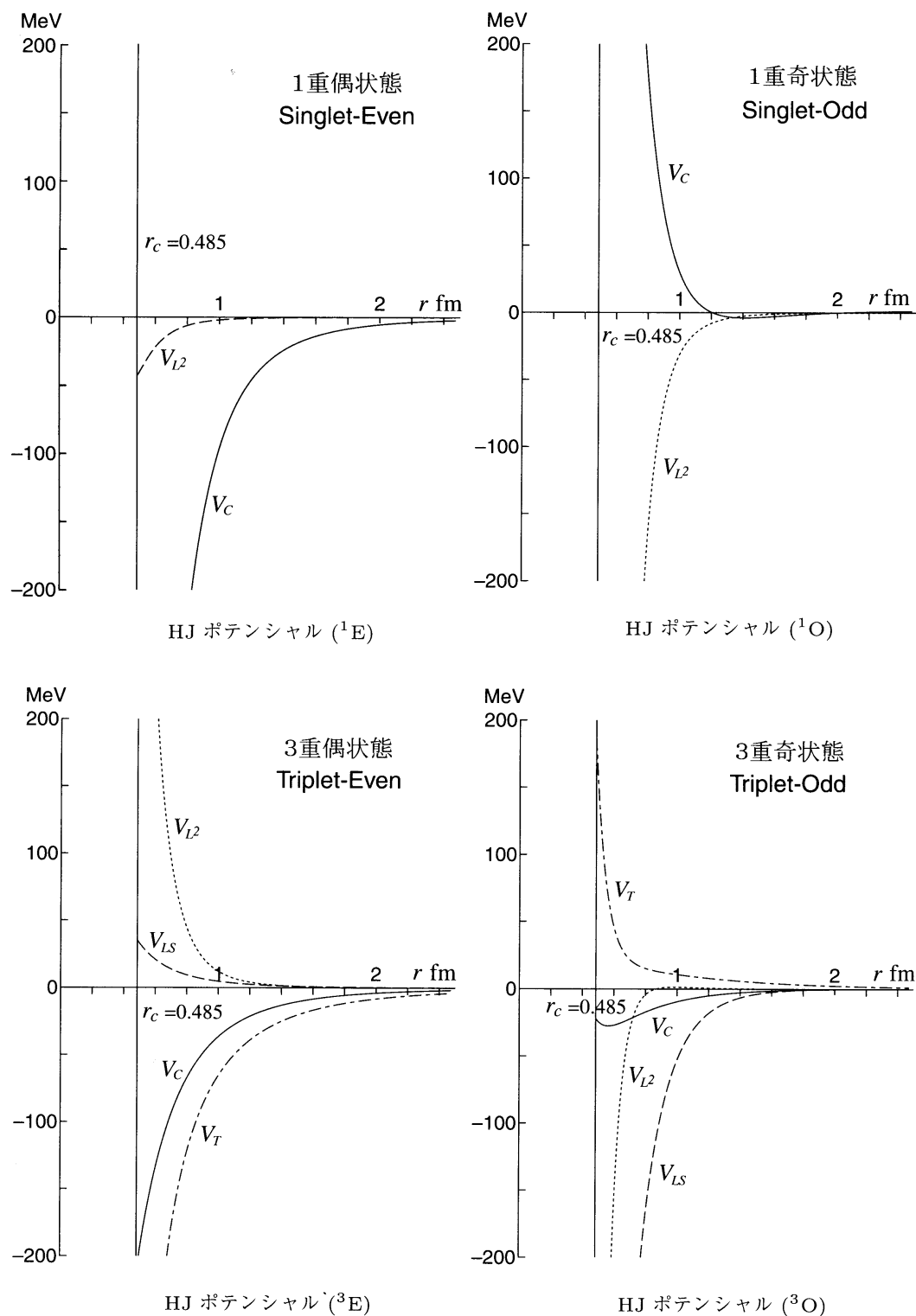


図 10: 現実的核力の1つである、浜田・ジョンストン (HJ) ポテンシャル。HJ ポテンシャルでは、 L^2 の項 (運動量の2次の項) が含まれる。

演習問題 5

- 2 粒子系のシュレディンガー方程式を、重心運動と相対運動に分離せよ。更に、相対の軌道角運動量は、重心を中心とした 2 つの粒子の軌道角運動量の和になることを示せ。
- 核力の中心力部分の 3 つの表現法

$$\begin{aligned}
 V_{\text{central}} &= V_0(r) + V_\sigma(r)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + V_\tau(r)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) + V_{\sigma\tau}(r)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \\
 &= V_W(r) + V_B(r)P_S + V_M(r)P_r + V_H(r)P_S P_r \\
 &= V_{SE}(r)\mathcal{P}_{01} + V_{SO}(r)\mathcal{P}_{00} + V_{TE}(r)\mathcal{P}_{10} + V_{TO}(r)\mathcal{P}_{11}
 \end{aligned} \tag{82}$$

の関係、すなわち $(V_0, V_\sigma, V_\tau, V_{\sigma\tau})$ 、 (V_W, V_B, V_M, V_H) 、 $(V_{SE}, V_{SO}, V_{TE}, V_{TO})$ を結びつける関係式を求めよ。

- 留数定理を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(ikr)}{k^2 + \lambda^{-2}} = \pi \lambda e^{-r/\lambda} \tag{83}$$

を示せ。

- 陽子や中性子の磁気モーメント (g -因子) が、ディラック粒子と考えた場合と大きく異なる事を以前述べた。これは、現実の陽子や中性子が、

$$\begin{aligned}
 p &= p(\text{dirac}) + (p(\text{dirac}) + \pi^0) + (n(\text{dirac}) + \pi^+) + \dots \\
 n &= n(\text{dirac}) + (n(\text{dirac}) + \pi^0) + (p(\text{dirac}) + \pi^-) + \dots
 \end{aligned} \tag{84}$$

と中間子の雲を纏っている為と考えられている。磁気モーメントの、実験値とディラック粒子と考えた場合の理論値との差を計算し、陽子や中性子が上記のように中間子の雲を纏っているという考えが妥当か半定量的に議論せよ。なお、パイ中間子のスピンは 0 である。

計算・メモ用余白