

7 原子核の安定性と存在領域

現在までに実験的に存在が確認されている約 3,000 種の原子核のほとんどは不安定であり有限の寿命をもっている。この時、寿命が長いかわりかを判断するための時間のスケールは、原子核における典型的エネルギー 1 MeV に対応する時間、

$$t = \frac{\hbar}{1 \text{ MeV}} = \frac{\hbar c}{1 \text{ MeV} \cdot c} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \text{ MeV} \cdot 3.0 \times 10^8 \times 10^{15} \text{ fm/s}} \approx 0.67 \times 10^{-21} \text{ s} \quad (1)$$

または典型的な長さのスケール 1 fm を光速の粒子が通り過ぎるのに要する時間

$$t = \frac{1 \text{ fm}}{c} \approx \frac{1 \text{ fm}}{3.0 \times 10^8 \times 10^{15} \text{ fm/s}} \approx 0.33 \times 10^{-23} \text{ s} \quad (2)$$

が用いられる。従って、大雑把に言って 10^{-22} s 程度が原子核の世界での典型的な時間スケールであり、この時間に比べて十分長い寿命を持つものが原子核として存在すると考える。

7.1 原子核反応の閾値と崩壊定数

原子核の世界で特徴的なことは、相異なる原子核同士が原子核反応によって互いに移り変わることである。このような原子核反応 (略して核反応) は、化学反応の時と同様に、



のように表し、左辺が始状態、右辺が終状態に対応する。この例では、原子核 a と原子核 A が核反応を起こし、原子核 b と原子核 B (更に X, \dots) が生成されたことを表している。終状態が 2 体の場合には、



という表現が用いられる。反応の閾値 Q は、

$$\begin{aligned} Q &\equiv (M_a + M_A)c^2 - (M_b + M_B + M_X + \dots)c^2 \\ &= (\text{始状態の系の静止エネルギー}) - (\text{終状態の系の静止エネルギー}) \end{aligned} \quad (5)$$

で定義され、

発熱反応 $Q > 0$

吸熱反応 $Q < 0$

である。

崩壊 (decay) は a が存在しない場合に対応する。 $Q > 0$ の場合は反応後の状態の方がエネルギーが低く、質量エネルギーを解放する事により自発的に反応が起こる (つまりエネルギーを与えなくても起こる)。ほとんど全ての原子核が不安定であるという事実は、ほとんど全ての原子核で $Q > 0$ となる終状態 (2 粒子以上) が存在し、放射線 $b(+\dots)$ を放出して崩壊する。このような崩壊現象は、量子力学的な確率法則に従っており、時刻 t での原子核の個数を $N(t)$ とすると、

$$dN = -\lambda N(t)dt \quad \rightarrow \quad N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (6)$$

となる。ここで、 λ を**崩壊定数 (decay constant)**または**崩壊率 (decay rate)**といい、単位時間当たりの崩壊確率を表す。平均寿命 (個数が $1/e$ になる時間) τ と半減期 (個数が半分になる時間) T は、各々 λ を用いて、

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad T = \tau \log 2 = \frac{\log 2}{\lambda} \quad (7)$$

と表される。

このような崩壊によって放射線が発生するとき、その強さを表す量は放射能と呼ばれ、単位時間当たりの崩壊数で定義される¹。従って、放射能は崩壊定数に放射性原子核の個数を掛けたものに他ならない。放射能の単位は、

ベクレル (Becquerel):Bq 1秒あたりの崩壊数 ($1 \text{ Bq}=1 \text{ s}^{-1}$)

キュリー (Curie):Ci ラジウム-226(^{226}Ra)1グラム・1秒あたりの崩壊数。 $1 \text{ Ci}=3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$ 。

であり、ベクレルがSI単位でありよく使用される。

寿命 τ が長ければ放射能は小さい。逆に、寿命 τ が短いと放射能は大きい、すぐに崩壊して無くなってしまふ (N が1より小さくなる)ので危険性は少ない。従って最も危険なのは、 τ =数-数十年を持つ核種であり、例えば原子力発電などの放射性廃棄物として問題になる²。

具体的に、ある原子核で崩壊がどのように起こるかは、先に考えた原子核の結合エネルギー (質量公式) から見積もることができる。通常起こり得る原子核の崩壊は以下の通りである。

α -崩壊 アルファ線 (^4He の原子核)を放出

β -崩壊 ベータ線 (電子または陽電子)を放出 (弱い相互作用による)

γ -崩壊 ガンマ線 (光子)を放出 (電磁相互作用による)

核子崩壊 (proton/neutron-decay) 核子 (陽子または中性子)を放出 (強い相互作用による)

核分裂 (fission) 色々な原子核に分裂

一般に、重い原子核は全て核分裂に対して不安定である。原子核を (N, Z) の関数として見た場合、 (N, Z) 平面上で存在する領域は、上の崩壊様式 (崩壊モード) に対して各原子核がどれだけの寿命を持っているかで決まっている。通常、安定な原子核と言われるのは、全寿命 $\tau_{\text{tot}} > 5 \times 10^8$ 年 (5億年 $= 1.5 \times 10^{16}$ s) を持つものをいう。

¹1回の崩壊でいくつの放射線が発生するかや、それらのエネルギーは崩壊毎に異なる。従って放射能の強さで、放射線の数やそのエネルギーを比較する時は注意を要する。

²原子力発電などで生じる人工的な放射性廃棄物以外に、自然界には放射性核種が存在し、我々はそれらからの放射線を微量ではあるが浴びている。また宇宙からの放射線 (宇宙線) が大気と反応して生じる2次宇宙線も浴びている。これらはまとめて自然放射線 (環境放射線) と呼ばれる。またこれら以外に医療 (レントゲン撮影等) でも放射線を浴びている。環境放射線は当然のことながら環境に依存する。例えば飛行機に乗ると、上空では大気による遮蔽効果が弱まるため2次宇宙線の放射能は強くなる。また医療目的の放射線は、疾患 (癌など) が見つかると治療する確率と、放射線により疾患を誘発する確率等を考慮して、その利用は正しく制限されている。従って、我々の環境での放射能を0にするとするのは実際的に意味の無いことであり、人工放射能を適切なレベルに抑え、かつ放射線を有効に利用していくことが重要である。

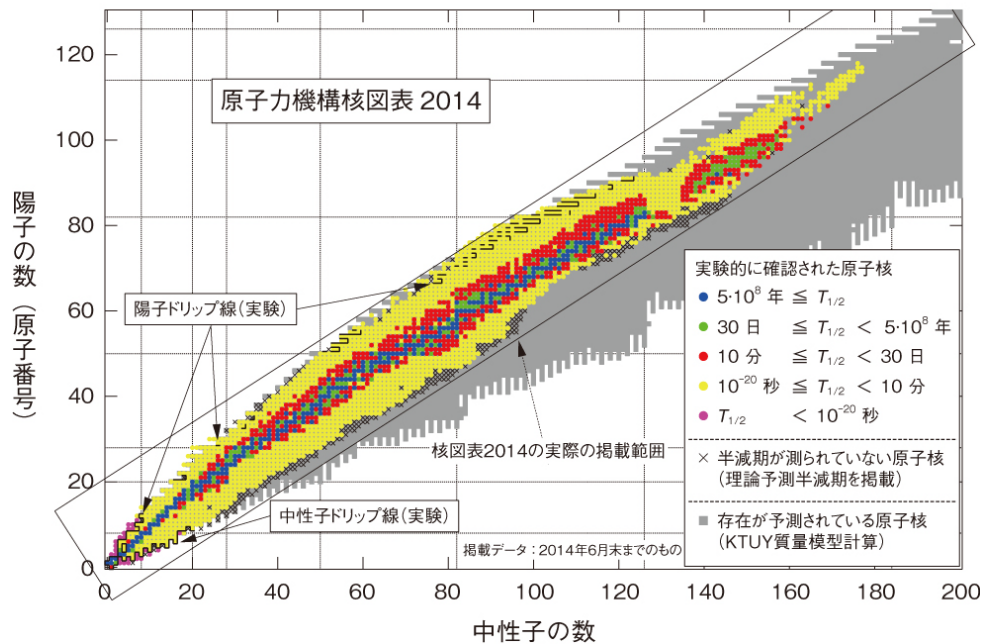


図 1: 核図表。横軸に中性子数 (N)、縦軸に陽子数 (Z) が取られ、各核種の寿命 (半減期) によって色分けされている。グレーの部分は存在が予言されている ($S_n, S_p > 0$ 且つ核分裂に対して安定) が、実験的に今だ発見されていない核種を表している。未発見の核種は中性子過剰側に多い。(原子力機構核図表より)

原子核によっては、複数の崩壊に対して同程度の寿命を持つものも存在する。各崩壊の寿命を τ_1, τ_2, \dots とすると、全寿命 τ_{tot} (または全崩壊定数 λ_{tot}) は、各崩壊が独立であることに注意すると、

$$\frac{1}{\tau_{\text{tot}}} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \dots, \quad (\lambda_{\text{tot}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots) \quad (8)$$

で表される。

以下、各崩壊様式について具体的に見ていく。

7.2 核子崩壊 (proton/neutron-decay)

原子核 (N, Z) が存在できるか否かは、陽子または中性子を自発的に放出するかどうかで決まる。陽子・中性子の分離エネルギー (separation energy) を S_p, S_n とおくと、

$$S_p(N, Z) = [M(N, Z-1) + m_p]c^2 - M(N, Z)c^2 = E_B(N, Z) - E_B(N, Z-1) \approx \left. \frac{\partial E_B}{\partial Z} \right|_N \quad (9)$$

$$S_n(N, Z) = [M(N-1, Z) + m_n]c^2 - M(N, Z)c^2 = E_B(N, Z) - E_B(N-1, Z) \approx \left. \frac{\partial E_B}{\partial N} \right|_Z$$

と、原子核の結合エネルギー E_B を用いて表される。

例えば陽子崩壊 (proton-decay)、

$$(N, Z) \rightarrow (N, Z - 1) + p \quad (10)$$

において、崩壊反応の閾値 Q_p を考えると、

$$\begin{aligned} Q_p &\equiv M_A(N, Z)c^2 - [M_{A-1}(N, Z - 1) + m_p]c^2 \\ &= -\underbrace{[Nm_n + Zm_p - M_A(N, Z)]c^2}_{E_B(N, Z)} + \underbrace{[Nm_n + (Z - 1)m_p - M_{A-1}(N, Z - 1)]c^2}_{E_B(N, Z - 1)} \\ &= -S_p(N, Z) \end{aligned} \quad (11)$$

である。従って、分離エネルギー S は反応の閾値 Q そのもの (符号は逆) を表す重要な量である (中性子崩壊についても同様)。

分離エネルギーを大雑把に見積もるために、結合エネルギーの B-W の公式で対エネルギーを無視した、

$$E_B^{BW}(N, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{2A} \quad (12)$$

を用い、 N または Z に関する微分を考える。結果は、

$$\begin{aligned} S_p(N, Z) &= a_V - a_S \frac{2}{3(N + Z)^{1/3}} - a_C \frac{Z(6N + 5Z)}{3(N + Z)^{4/3}} + a_a \frac{(N - Z)(3N + Z)}{2(N + Z)^2} \\ S_n(N, Z) &= a_V - a_S \frac{2}{3(N + Z)^{1/3}} + a_C \frac{Z^2}{3(N + Z)^{4/3}} - a_a \frac{(N - Z)(N + 3Z)}{2(N + Z)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

自発的な核子放出が起こる領域は、 $S_p < 0$ 及び $S_n < 0$ ($\equiv Q > 0$ で発熱反応) で表され、 (N, Z) の核図表の中での原子核の存在限界を決定する。その境界を定める条件、

$$S_p(N, Z) = 0, \quad S_n(N, Z) = 0 \quad (14)$$

は陽子数 Z と中性子数 N の間に決まった関係を与え、 (N, Z) 平面内で曲線を定める。 Z -軸・ N -軸側それぞれの曲線を、**陽子・中性子のドリップ線 (drip line)** という。

このように、ドリップ線の外側では核力の作用によって自由に核子放出が起こる (核子が零れ落ちる (drip する))。その寿命は、原子核の典型的な時間スケールである 10^{-22} – 10^{-20} s 程度と非常に短い。

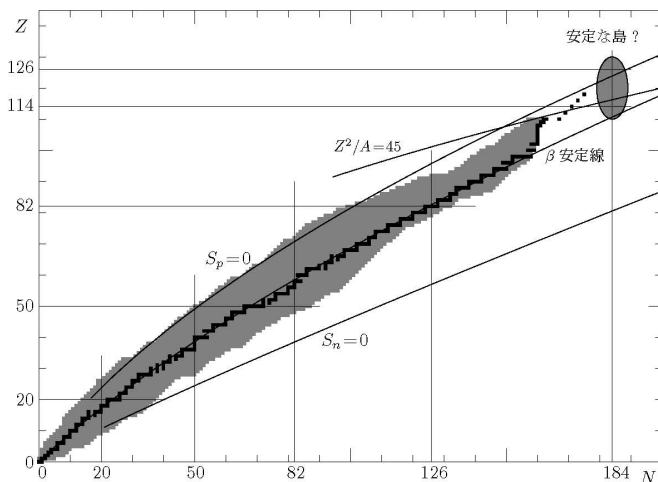


図 2: 核図表上に、陽子・中性子のドリップ線 ($S_p = 0$, $S_n = 0$ の線) を記したものを。■は $A = N + Z$ を与えたときに最も結合エネルギーが大きい (安定な) 原子核を示す。灰色の部分を実験的に見付かっている核種を表し、陽子過剰側はドリップ線まで到達しているが、中性子過剰側は軽い核を除きドリップ線に到達していない。 $Z^2/A = 45$ の線は核分裂に対する安定線を示す。

陽子は核力以外にクーロン力を受ける。このクーロン相互作用のために、実際には、 $S_p < 0$ であっても $|S_p|$ が小さい限り長い寿命を持つ。クーロン相互作用が特に大きくなる重い原子核では、非常に長い寿命を持つ場合がある。この時は陽子ドリップ線の外側の原子核も**準安定**とみなせる。なぜ長い寿命を持ち得るかについては、後の α -崩壊の項参照。

7.3 γ -崩壊

γ -崩壊は核種 (N, Z) を変えない崩壊であり、原子核が励起状態からより低い励起状態、または基底状態にガンマ線 (光子) を放出して遷移する。ちょうど、原子中の電子が、よりエネルギーの高い軌道から低い軌道に遷移する時と同様である。ただし、原子核の場合はそのエネルギー・スケールは MeV であるので、電子の場合の X 線と異なり、よりエネルギーが高く波長の短いガンマ線が放出される。

一般に核反応が起こると、その終状態が励起状態になることが多いので、 γ -崩壊は多くの核反応に伴って起こる。

γ -崩壊は**電磁遷移 (electro-magnetic transition)** とも呼ばれ、電磁相互作用によって起こるのでその寿命は典型的には、

$$\tau(\text{電磁相互作用}) \approx 10^{-10} \sim 10^{-15} \text{ s} \quad (100 \text{ ps} \sim 1 \text{ fs}) \quad (15)$$

であり、核子崩壊の場合に比べてずっと長い。原子核の励起状態によっては、特に長い寿命を持つ場合があるが、このような原子核は準安定状態とみなせ**アイソマー (isomer)** と呼ばれる。

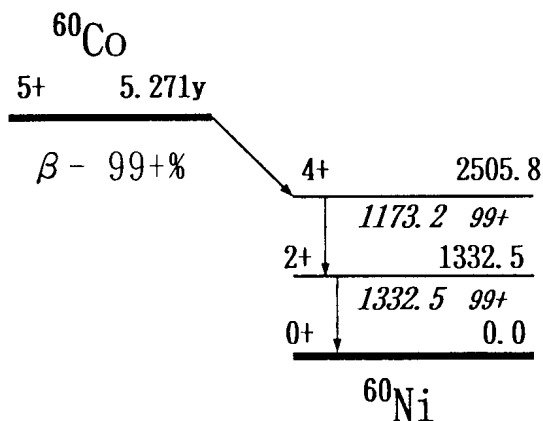


図 3: γ 崩壊・ β 崩壊の崩壊図の例。 ^{60}Co は $E_{\text{max}} = 0.31 \text{ MeV}$ の β^- 線を出して崩壊するが、 β^- 線の放出に続いて 1.17 MeV 及び 1.33 MeV の 2 本の γ 線をカスケードに放出し、 ^{60}Ni になる。 β^- 崩壊は右下がりの線をもって表示し、 γ 線は励起状態間の縦線で表す。

7.4 β -崩壊

β -崩壊は、弱い相互作用によって起こる以下の素粒子の崩壊反応 (**素過程**という) が原子核内で起こる反応である。

$$\beta^- \text{-崩壊} \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad Q = +0.782 \text{ MeV}$$

$$\beta^+ \text{-崩壊} \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad Q = -1.804 \text{ MeV}$$

$$\text{電子捕獲} \quad p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad Q = -0.782 \text{ MeV}$$

ここで、新しく出てきた素粒子 ν_e 、 $\bar{\nu}_e$ はそれぞれニュートリノ (neutrino)、反ニュートリノ (anti-neutrino) と呼ばれ、現在の素粒子の標準理論では質量が 0 である (上記の Q 値もニュートリノの質量を 0 として求められている)³。

³ごく最近、太陽からのニュートリノの観測等から、ニュートリノが質量を持つらしいことが実験的に確認されつつある。

β -崩壊では原子核内での陽子と中性子が互いに移り変わる為、原子核は、

$$\beta^- \text{-崩壊 } (N, Z) \rightarrow (N - 1, Z + 1)$$

$$\beta^+ \text{-崩壊} \cdot \text{電子捕獲 } (N, Z) \rightarrow (N + 1, Z - 1)$$

と変化する。電子の質量を無視する近似では β^+ 崩壊と電子捕獲は区別できない (Q 値が共に -1.293 MeV となる) ので、以下では β^+ 崩壊で代表させて議論する。なお、後で見るように、原子核の安定性を論じる上で最も重要な崩壊様式がこの β -崩壊である。

まずは、原子核の β -崩壊に対する安定性の概観を示すために、電子の質量 (m_e) と核子の質量差 ($m_n - m_p$) を無視する。 β -崩壊では核子数は保存するため、

$$\partial A = \partial N + \partial Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial N = -\partial Z \quad (16)$$

であることに注意すると、 β -崩壊の閾値は簡単に、

$$\beta^- \text{-崩壊 } Q_{\beta^-} = E_B(N - 1, Z + 1) - E_B(N, Z) \approx - \left. \frac{\partial E_B}{\partial N} \right|_A = + \left. \frac{\partial E_B}{\partial Z} \right|_A$$

$$\beta^+ \text{-崩壊 } Q_{\beta^+} = E_B(N + 1, Z - 1) - E_B(N, Z) \approx - \left. \frac{\partial E_B}{\partial Z} \right|_A = + \left. \frac{\partial E_B}{\partial N} \right|_A$$

と求められる。すなわち、この近似のもとでは、ほとんどの原子核で β^\pm -崩壊のいずれかが起こることを示しており、安定な原子核は次の条件で決まる。

$$\text{原子核の}\beta\text{-崩壊安定性} \quad \Leftrightarrow \quad \left. \frac{\partial E_B}{\partial Z} \right|_A = 0 \quad (17)$$

核子崩壊のところで用いた、対エネルギーを無視した B-W の質量公式を用いると、この条件は、

$$\left. \frac{\partial E_B}{\partial Z} \right|_A = -a_C \frac{2Z}{A^{1/3}} + 2a_a \frac{(A - 2Z)}{A} = 0 \quad (18)$$

と表され、 Z を A の関数として求めると、

$$Z = \frac{A}{2 + \left(\frac{a_C}{a_a}\right) A^{2/3}} \approx \frac{A}{2 + 0.015 A^{2/3}} \quad (19)$$

となる。これは、陽子・中性子のドリップ線と同様に、 (N, Z) 平面内で安定核を表す曲線を定める。これを β -安定線という。

β -崩壊の寿命は、フェルミ (Fermi) の弱い相互作用の理論を用いて計算されるが、その値は典型的には数分、一般には数ミリ秒から数年 (10^{-3} – 10^8 s) 程度と広い範囲にわたる⁴。特に、 β -安定線から離れるに従って、寿命は急激に短くなる。なお、このフェルミの理論については、電磁相互作用の場合と同様に場の量子論の理論が必要であるので、この講義では論じない (他の講義や各人の勉強に委ねる)。一般に、 β -崩壊の寿命が、核子崩壊や γ -崩壊の寿命に比べて長いのは、対応する相互作用である弱い相互作用が、強い相互作用や電磁相互作用に比べて弱いためである。

⁴例えば中性子の寿命は 885.7 s (約 9 分) であり、各種年代測定に用いられる ^{14}C の寿命は約 5,730 年である。

電子の質量 (m_e) と核子の質量差 ($m_n - m_p$) を考慮すると、 β -崩壊の閾値は、

$$\begin{aligned} \beta^- \text{-崩壊 } Q_{\beta^-} &\approx - \left. \frac{\partial E_B}{\partial N} \right|_A + Q_{\beta^-}^0, & Q_{\beta^-}^0 &= (m_n - m_p - m_e)c^2 \\ \beta^+ \text{-崩壊 } Q_{\beta^+} &\approx - \left. \frac{\partial E_B}{\partial Z} \right|_A + Q_{\beta^+}^0, & Q_{\beta^+}^0 &= (m_p - m_n - m_e)c^2 \end{aligned}$$

となり、素過程での β -崩壊の閾値が付け加わる。従って、実際の β -安定線は、上記の簡単な評価から僅かにずれる。

一般に、原子核の質量 $M(N, Z)$ を (N, Z) 平面上の関数とみなすと谷になる部分がある。上記の β -安定線の定義から、谷底の線 ($A = N + Z$ が一定の曲線上での極小点を結んだ線) が β -安定線に他ならない。この質量、または結合エネルギーの谷をハイゼンベルグ (Heisenberg) の谷という。

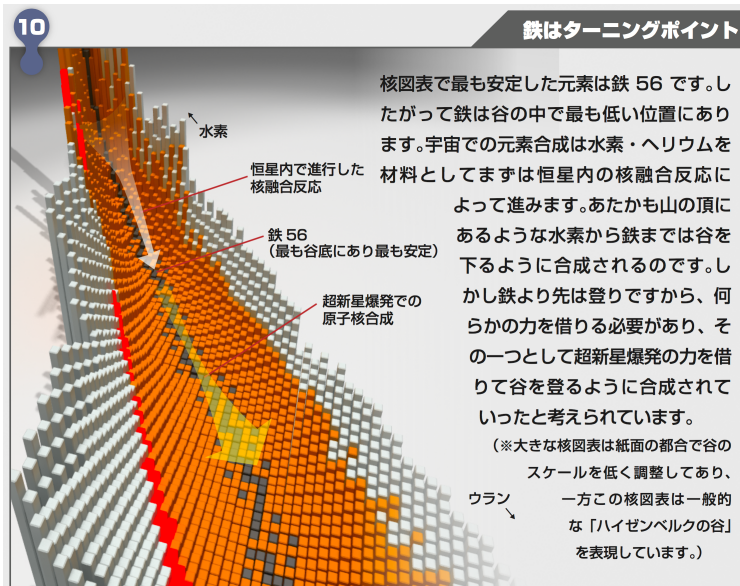


図4: ハイゼンベルグの谷。計算機シミュレーションにより原子核の結合エネルギーの (N, Z) 依存性が3次的に描かれている。川底の様になっていて、黒色で示されているのがハイゼンベルグの谷 (安定な原子核) である。 $A \approx 56$ の Fe 部分が谷底であり、最も安定な原子核であることを示している。(監修: 理化学研究所 仁科加速器研究センター)

ここまででは簡単の為、対エネルギーを無視してきた。 β -崩壊では、陽子数と中性子数の偶奇が入れ替わる。

$$\begin{aligned} [N : \text{偶 (even)}, Z : \text{奇 (odd)}] &\rightleftharpoons [N : \text{奇 (odd)}, Z : \text{偶 (even)}] \\ [N : \text{偶 (even)}, Z : \text{偶 (even)}] &\rightleftharpoons [N : \text{奇 (odd)}, Z : \text{奇 (odd)}] \end{aligned} \quad (20)$$

従って、実は β -崩壊では対エネルギーは重要な役割を果たす。実際、 β -崩壊の特徴、

β -崩壊の特徴 1 奇核 (even-odd/odd-even) はただ1つの安定核を持つ (ごく特殊な例外を除く)

β -崩壊の特徴 2 偶々核 (even-even) は1-3つの安定核を持つ

β -崩壊の特徴 3 奇々核 (odd-odd) は一般に不安定である (スムーズな $M(N, Z)$ を持たない、ごく軽い核ではこのことは成り立たないので幾つか例外がある⁵⁾)

β -崩壊の特徴 4 奇々核 (odd-odd) には、 β^\pm 両方の崩壊をする核が存在する

は、対エネルギーを考慮すると、谷を $N + Z = A$ が一定の平面で切った曲線が、

⁵⁾例外は、 ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$ の4つのみである。実は安定核の60%は偶々核である。

奇核 (even-odd/odd-even) 始状態と終状態が同一の曲線上にある (同一曲線上で、 β^\pm によりより安定な状態に遷移する)

偶々・奇々核 (even-even/odd-odd) 始状態と終状態は対ギャップの分だけ異なる為、 2Δ だけ離れた曲線上にある (β^\pm により、2つの曲線を行き来しながら、より安定な状態に遷移する)

となることを考慮すると容易に理解できる。図5参照。

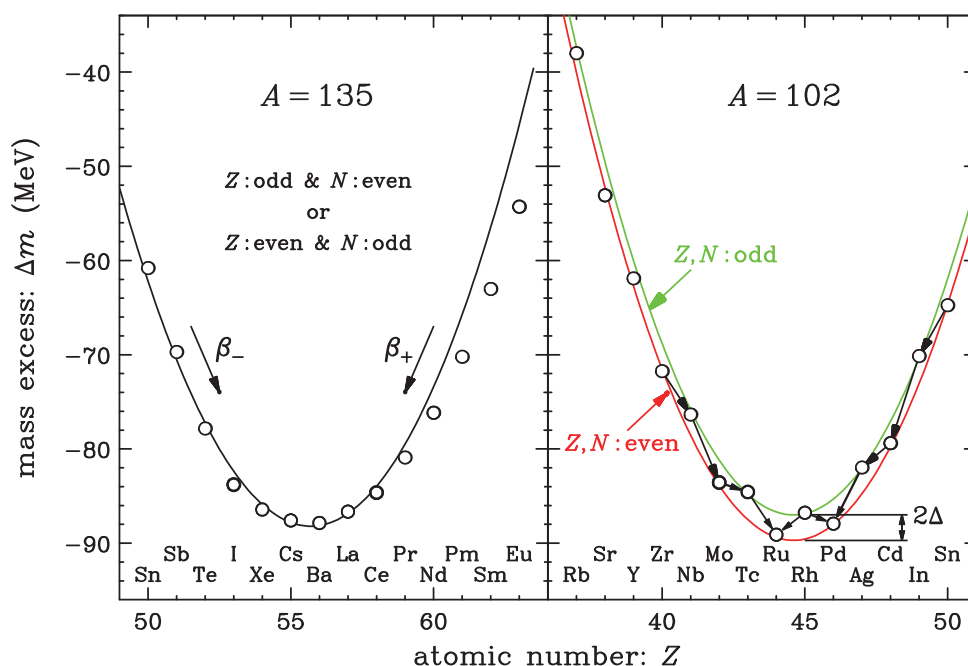


図5: 原子番号 Z の関数として見た結合エネルギー (下がより安定)。左図は奇核の場合で、この場合は β^\pm 崩壊により滑らかな曲線上を移動する。谷底の1核種のみが安定であり、クーロン力の効果により $N = Z$ からズレる。右図は偶々核・奇々核の場合で、対エネルギーの効果により2つの曲線 (偶々核の場合が安定で下) となる。 β^\pm 崩壊により2つの曲線を行き来する。この場合は2つの安定な偶々核が存在する (\Rightarrow 安定な奇々核は無い)。

7.5 α -崩壊

α 粒子は原子核の中でも特に安定な原子核であり、その結合エネルギーは約 28 MeV である。ここで、原子核の核子当たりの平均結合エネルギーが約 8 MeV であったことを思い出すと、

$$\alpha \text{ 粒子の結合エネルギー: } 28 \text{ MeV} < 4 \times 8 \text{ MeV} = 32 \text{ MeV} \quad (21)$$

であるので、 α 粒子を放出する、

$$(N, Z) \rightarrow (N - 2, Z - 2) + \alpha \quad (22)$$

という崩壊反応が起こりやすくなる。実際、その閾値は、

$$Q_\alpha = [E_B(N - 2, Z - 2) + E_B(\alpha)] - E_B(N, Z) \quad (23)$$

であるが、 $E_B(\alpha)$ が大きい為に、特に重い核では $Q_\alpha > 0$ となりやすく、 β -崩壊と同程度の寿命で起こる。ウラン (U) やトリウム (Th) 原子核等では α -崩壊と β -崩壊が競合して、特徴的な鎖状の崩壊系列 (decay chain) を形成する。

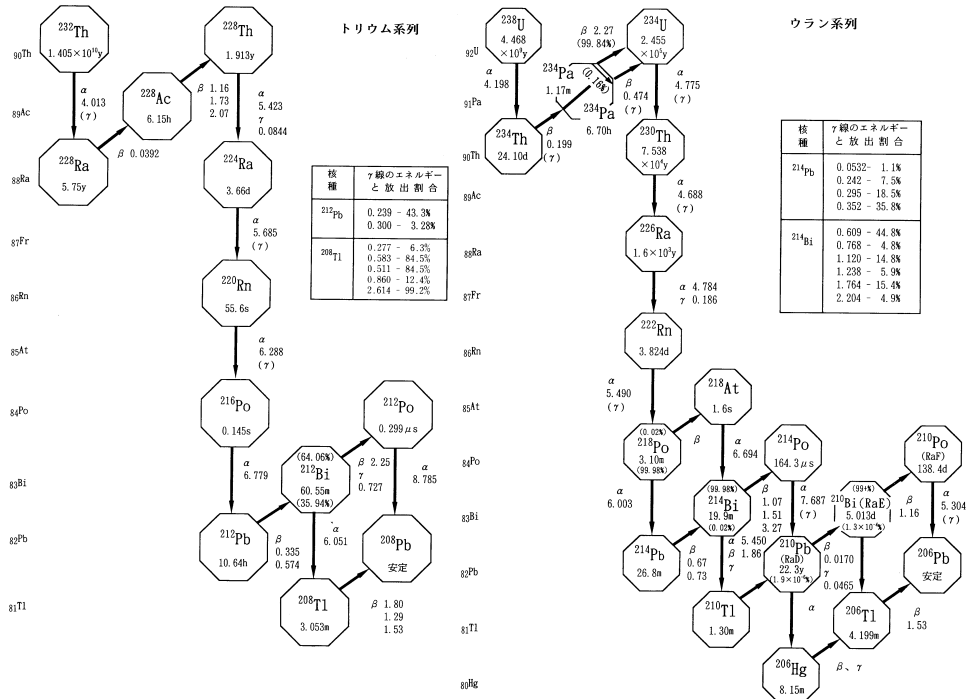


図 6: トリウム系列 (左図) 並びにウラン系列 (右図) の崩壊系列図。上から下への崩壊が α -崩壊に対応し、右上への崩壊が β -崩壊に対応する。八角形内の数字が各核種の半減期を示し、 α, β, γ の記号と共に記されている数字が各放射線の (最大) エネルギー (単位は MeV) を表している。

このような α -崩壊の寿命を理解するための理論的分析は、1928 年に量子力学が確立してすぐに、ガモフ (G.Gamov) によって行われ、量子力学的トンネル効果が自然に存在することを示す最初の例となった。ガモフの理論の大筋は次の通りである。

“原子核内には α 粒子が塊として (ある確率で) 存在し、原子核はそれらから成る” という考え方 (モデル) を広く **原子核のクラスタ模型** という。この考え方によると、核内では α 粒子がある確率で存在し、それはあるポテンシャル $V_\alpha(r)$ を感じて核内で運動している。核力によって原子核内に束縛されているので、 $V_\alpha(r)$ は中心付近では引力 (簡単には井戸型 $-V_0$)、外側では α 粒子は原子核からのクーロン反発力を感じるので $(1/r)$ の斥力となっているはずである。従って、 $V_\alpha(r)$ は表面付近に山 (障壁) を持っている。 α -崩壊を起こす原子核では、 $E_\alpha > 0$ の α 粒子の準束縛状態が存在し、ポテンシャル障壁のために

古典力学 α 粒子は外に出て行く事ができない (束縛されている)

量子力学 トンネル効果によって有限の確率 (寿命) で外に出て行く

となる。1928 年、ガモフはこの量子力学的トンネル効果の確率を計算し、 α -崩壊の寿命の特徴を見事に説明した。

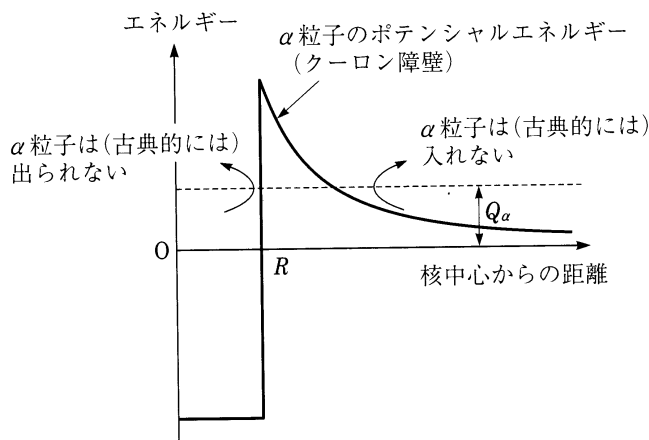


図7: α -崩壊の概念図。核力は井戸型ポテンシャルで近似されている。原子核内にある α 粒子は、エネルギーが正であってもクーロン障壁より低い限りは古典的には外に出られない(崩壊しない)。しかしながら実際には量子力学的トンネル効果によりある確率で障壁を透過するため、 α 崩壊は起こる。逆に散乱を考えた場合も、ポテンシャル障壁よりエネルギーが低い場合はポテンシャル障壁で跳ね返されるため核反応は古典的には起こらない。しかし実際には量子力学的トンネル効果により透過し、(確率は小さいが)核反応が起こる。

同様の考え方は、陽子放出にも当てはまる。すなわち、陽子が感じるポテンシャルは、核力による中心付近の引力と外側でのクーロン斥力の和になっている。従って核表面付近にポテンシャルの山(障壁)があり、陽子放出の閾値 Q が正になっても、ポテンシャル障壁を透過して出てくるトンネル効果によって崩壊が起こるので、かなり長い寿命を持つ。従って、陽子ドリップ線外側の原子核についても、準安定状態とみなせる場合がある。

7.6 トンネル効果の準古典的理論 (WKB 理論)

一般に、1次元のポテンシャル問題において、中心付近にいた粒子がポテンシャル障壁を透過して外に出てくる確率を、WKB理論と呼ばれる方法で準古典的に求めることができる。すなわち、ポテンシャルの形が与えられると、次に与える簡単な積分形の公式によって崩壊率が与えられる。ここでは、それを導くことは他の講義や参考文献に譲り、結果だけを用いる。

WKB理論によれば、崩壊定数 λ は、

$$\lambda(E) = \lambda_0(E) \exp \left[-\frac{2W(E)}{\hbar} \right] = \lambda_0(E) P(E), \quad P(E) \equiv \exp \left[-\frac{2W(E)}{\hbar} \right] \quad (24)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda_0(E)$ はエネルギー E の関数としてゆっくり変化するオーダー1の量である。その具体的な形は問題によっていろいろであり、ここでは割愛する。 $P(E)$ の部分が準古典論によってトンネル効果を記述するのに重要な部分であり、**透過係数 (transmission coefficient)** または **透過因子 (penetration factor)** と呼ばれる。この指数関数の肩の関数 $W(E)$ は古典的な作用積分 (action integral) である。

$$\text{作用積分} \quad W(E) = \int_{x_i(E)}^{x_f(E)} \tilde{p}(x, E) dx, \quad \tilde{p}(x, E) = \sqrt{2M(V(x) - E)} \quad (25)$$

ここで、積分の端点 $x_i(E)$ と $x_f(E)$ はポテンシャル、

$$V(x) = E \quad (26)$$

を満たす運動の転回点 (turning point) である。ただし、この作用積分は通常のものではなく、トンネル効果が古典力学的に許されない領域を運動することを反映して虚時間 (imaginary time) を用いて計算されたものになっている点に注意。

ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(x) = E(\text{一定}) \quad (27)$$

であり、古典的に許されない領域は、

$$V(x) \geq E \quad (28)$$

である。ここでは、

$$p^2 = 2M(E - V(x)) \leq 0 \quad (29)$$

である。ここで、虚時間 τ を導入して、

$$\tau \equiv it \quad \rightarrow \quad \tilde{p} \equiv M \frac{dx}{d\tau} \quad (30)$$

と、虚時間に対応した運動量 \tilde{p} が WKB 理論の作用積分には現れている。

作用積分が解析的に計算できる場合には、出てくるエネルギー E に対して寿命 $\tau = 1/\lambda$ がどのように変化するかを容易に調べることができる。以下、その例について述べる。

■井戸型+クーロン場: α -粒子の崩壊の場合⁶ α 粒子が原子核内で感じるポテンシャルを中心力場とし、核力の働く核内 (核半径 R) では井戸型、外側ではクーロン斥力場として、

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ \frac{BR}{r} & r \geq R \end{cases} \quad (31)$$

とする。ここで、 α -崩壊の場合は、

$$BR = 2(Z-2)e^2 \approx 2Ze^2 \quad (Z \gg 1 \text{ の重い核の場合}) \quad (32)$$

である。

α 粒子が S 波 (軌道角運動量 $l=0$) の場合を考えると、作用積分は容易に計算できる。通常、 α -崩壊により出てくる α 粒子のエネルギーは 5 MeV 程度で、ポテンシャル障壁の高さ B に比べて十分小さい ($E_\alpha \ll B$) という条件を用いると、結果は、

$$W(E_\alpha) = R \sqrt{\frac{\mu B}{2}} \left(\pi \sqrt{\frac{B}{E_\alpha}} - 4 \right) = \text{const.} + \frac{\pi}{2} BR \sqrt{\frac{2\mu}{E_\alpha}} \quad (33)$$

となる。但し、 μ は残留原子核と α 粒子の換算質量、 E_α は出てくる α 粒子のエネルギーである。 α 崩壊が実際に起こる重い原子核の場合、

$$\mu \approx \frac{4 \cdot (A-4)}{4 + (A-4)} m_N c^2 \approx 4m_N c^2 \approx m_\alpha \quad (34)$$

と換算質量はほぼ α 粒子の質量 m_α に等しくなる。これと $BR = 2Ze^2$ を用いると、

$$\log \tau = -\log \lambda \approx \text{const.} + \frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha} \cdot \left(\frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \right) \quad (35)$$

⁶G.Gamov,1928.

と求められる (WKB 理論での前の因子 $\lambda_0(E)$ はエネルギーにあまりよらないのでここでは定数と近似した)。すなわち、寿命 τ はログスケールで $Z/\sqrt{E_\alpha}$ に比例する。この依存性は実験データを見事に説明し、かつ、比例乗数も上式の値にほぼ一致することが確かめられ、 α -崩壊が α 粒子のトンネル効果であることが確立したのである。

ここで、

$$\frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha} \cdot \left(\frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \right) \approx 2\pi \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{2m_\alpha c^2} \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \approx 2\pi \frac{1}{137} \sqrt{2 \times 3,700} \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \approx 4.0 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \quad (36)$$

であるので、例えばウランニウム U($Z = 92$) の場合で、 $E_\alpha = 5$ MeV から 10 MeV に変化したとすると、この値は 163 から 115 に変化する。 $\log_{10} \tau = 0.434 \log \tau$ に注意すると、これは寿命が 21 桁も短くなることを意味する。このように、粒子のエネルギーやその他の要因 (α -崩壊の場合は、原子核の原子数 Z) に対して、寿命が極めて敏感に変化するのにはトンネル効果による崩壊の特徴である。それは、作用積分が指数関数の肩に乗っていることによる。

■逆転調和振動子:核分裂の場合 もう一つの解析的に計算できる例は、調和振動子を逆転させた場合であり、1次元の場合は、

$$V(r) = B - \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \quad (37)$$

である。この時も、簡単に (虚時間) 作用積分が計算できて (各自計算してみよ)、

$$W(E) = \frac{\pi(B - E)}{\omega} \quad (38)$$

となる。これから、ポテンシャル障壁の高さ (バリア (barrier) の高さ) $(B - E)$ が大きいほど、それに指数関数的に比例して寿命が短くなることが見て取れる。

7.7 核分裂 (fission)

核子あたりの結合エネルギー E_B/A の振る舞いから、一般に重い原子核では核分裂が起こり得ることは既に述べた。

核分裂の場合、

親核 (parent nucleus) 分裂する元の原子核

娘核 (daughter nucleus) 分裂した後の原子核

という。一般に、娘核の組み合わせは一意的には決まらず、核分裂の動力学的効果を反映してある分布を持つ。今、親核 (N, Z) が娘核 (N_1, Z_1) と $(N - N_1, Z - Z_1)$ に分裂したとすると⁷、

$$(N, Z) \rightarrow (N_1, Z_1) + (N - N_1, Z - Z_1) \quad (39)$$

であり、この時の閾値は、

$$Q_{\text{fission}} = [E_B(N_1, Z_1) + E_B(N - N_1, Z - Z_1)] - E_B(N, Z) \quad (40)$$

となる。

⁷ほとんどの核分裂は 2 つに分かれる 2 体分裂 (binary fission) であるが、ごく稀に 3 体以上への多体分裂も起こり得る。

典型的な核分裂は“対称核分裂 (symmetric fission)”、すなわち、

$$N_1 \approx \frac{N}{2}, \quad Z_1 \approx \frac{Z}{2} \quad (41)$$

である。今、 $A \approx 200$ の親核が $A \approx 100$ の娘核 2 個に対称核分裂したとすると、 E_B/A の差は約 1 MeV であるから、200 MeV 程度ものエネルギーが放出される。これは、化学反応の場合の値数 eV/1 分子と比べると、 10^8 倍もの莫大なエネルギーである。これが、原子力によって巨大なエネルギーが得られる理由である。

対称核分裂の場合に、例によって対エネルギーを無視した B-W の質量公式を用いて閾値を見積もると、

$$\begin{aligned} Q_{\text{fission}} &= 2 \cdot E_B\left(\frac{N}{2}, \frac{Z}{2}\right) - E_B(N, Z) \\ &\approx a_S \left[A^{2/3} - 2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} \right] + a_C \left[\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 2 \times \left(\frac{Z}{2}\right)^2 / \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3} \right] \\ &= a_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}) \end{aligned} \quad (42)$$

である。ここで、

$$Q_{\text{fission}} > 0 \quad \text{発熱反応} \quad (43)$$

となる条件を考えると、

$$f \equiv \frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \cdot \frac{a_S}{a_C} \approx 17.4 \quad (44)$$

となる。ここで f は核分裂の起こり易さ (大きいほど起こり易い) を示す量であり **核分裂パラメータ (fissility parameter)** と呼ばれる。 β -安定な原子核に当てはめると、 $A > 92.5$ となり、確かにこれより重い原子核では核分裂し得ることが導かれる。しかしながら、実際に自発的に核分裂が起こるのは、もっとずっと重い $A \gtrsim 200$ の原子核である。

核分裂の観測されるもっとも軽い原子核は ${}_{92}^{238}\text{U}_{146}$ であるが、

$$Q \approx 177 \text{ MeV}, \quad f = \frac{Z^2}{A} \approx 35.6 \quad (45)$$

である。

何故自発核分裂が $A \gtrsim 200$ の原子核でないと起こらないかについては、液滴模型を用いて理解する事ができる。原子核を液滴として考え、核分裂反応が図 8 のように原子核が変形して反応が進行すると考える。

ここで原子核が球形 (半径 R) [A] から、楕円形 ($a = R(1 + \epsilon)$, $b = R(1 + \epsilon)^{-1/2}$) [B] へと変化する際の結合エネルギーの変化を考える。但し非圧縮性を考慮して、全体の体積は変わらないとする。球というのは体積一定で表面積が最小となる形であるので、それから楕円体に変形すると表面積が増加する。このため、表面エネルギーの項は、

$$E_B^{\text{表面}} = -a_S A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots \right) \quad (46)$$

と減少する。一方クーロンエネルギーの項は

$$E_B^{\text{クーロン}} = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 + \dots \right) \quad (47)$$

と増加する。従って、球形から ϵ だけ楕円形に変形した場合の結合エネルギーの変化分は、

$$\Delta E_B = -\frac{\epsilon^2}{5} \left(2a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right) \quad (48)$$

となる。 $\Delta E_B > 0$ の場合、変形した方がエネルギー的に安定 (ポテンシャルエネルギーが下がる) となる。その条件は、

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2a_S}{a_C} \approx 49 \quad (49)$$

で与えられるが、天然にはこのような原子核は存在しない。例えばウランについても、この値は 35.6 程度でしかない。

一方、ウランが真っ二つに 2 個の原子核に分かれると [D]、ポテンシャルエネルギーの変化は $\Delta E_B \approx -170 \text{ MeV}$ 程度である。この状態でのポテンシャルエネルギーの形は、クーロンポテンシャルの形 $(Ze/2)^2/r$ で与えられる。

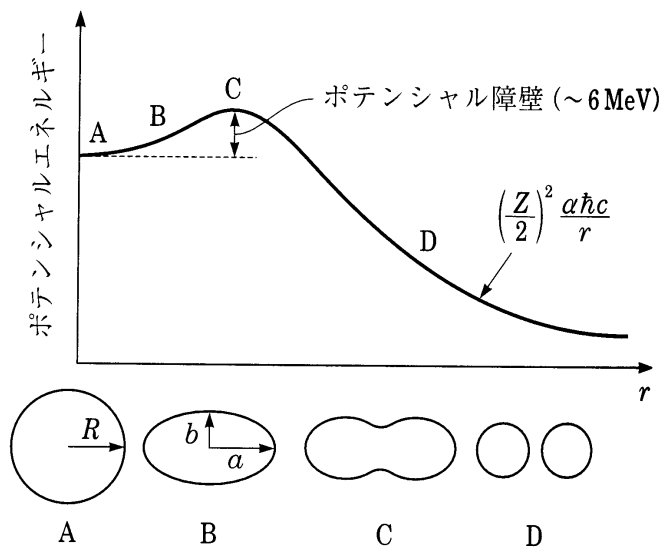


図 8: 核分裂の概念図。

さてこのように液滴模型に基づくと、核分裂に際しては中間状態として原子核の変形によるポテンシャルの壁を通過する必要がある事が分かる。ポテンシャル障壁が逆調和振動子で近似できるとすると、先の WKB 理論を用いて寿命は、

$$\log \tau = -\log \lambda \approx \text{const.} + 2\pi \frac{B - E}{\hbar \omega} \quad (50)$$

と表される。振動数 ω が原子核にあまり寄らないとすると (実際には $\hbar \omega \approx 1 \text{ MeV}$ であることが知られている)、寿命はログスケールで核分裂障壁 (fission barrier) の高さ $(B - E)$ に比例する。軽い核では障壁は数百 MeV の高さになり、寿命は極めて (宇宙の年齢よりはるかに) 長くなり、実施的には核分裂に対して安定とみなせる。これに対して U、Th 等の重い核になると、クーロン斥力が大きくなるので、核分裂障壁は数 MeV 程度まで低くなり、核分裂の寿命は α, β 崩壊と同程度にまで短くなる。

回転楕円体の表面積の近似式

表面エネルギーの近似式、式 (46) を導出する。

長軸が $a = R(1 + \epsilon)$ 、短軸が $b = R(1 + \epsilon)^{-1/2}$ の楕円を、長軸の周りに回転した回転楕円体 (扁長楕円体: prolate spheroid) の表面積 S は、

$$S = 2\pi b^2 \left(1 + \frac{a \sin^{-1} \epsilon}{b \epsilon} \right), \quad \epsilon^2 \equiv 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (51)$$

で与えられる。

ここで、

$$\begin{aligned} b^2 &= R^2(1 + \epsilon)^{-1} \\ &= R^2(1 - \epsilon + \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)) \\ ab &= R^2(1 + \epsilon)^{1/2} \\ &= R^2 \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \\ \epsilon^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - (1 + \epsilon)^{-3} \\ &= 3\epsilon - 6\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \frac{\sin^{-1} \epsilon}{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\epsilon + \frac{1}{6}\epsilon^3 + \frac{3}{40}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^7) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6}\epsilon^2 + \frac{3}{40}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \end{aligned} \quad (52)$$

であるので、表面積 S は、

$$S = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \quad (53)$$

と近似できる。

回転楕円体の表面積

長軸が a 、短軸が b の楕円を、長軸の周りに回転した回転楕円体 (扁長楕円体: prolate spheroid) の表面積 S の表式(51)を導出する。

長軸 (回転軸) を z 軸、短軸を x とすると、楕円は、

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (54)$$

で与えられる。この楕円を、 z 軸 (長軸) 周りに回転して出来る回転楕円体の表面積 S は、

$$S = 2\pi \int_{-a}^a x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz \quad (55)$$

で求められる。ここで、 $\pm z$ に対する対称性、及び式(54)と $dx/dz = -(z/x)(b^2/a^2)$ から、

$$S = 4\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 z^2} dz, \quad \varepsilon^2 \equiv 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (56)$$

である (ε は離心率)。

積分を実行するために、まず $z = a \sin \theta$ とおくと、

$$S = 4\pi ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \quad (57)$$

となる。

次に、 $\varepsilon \sin \theta = \sin \phi$ とおくと、

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \frac{ab}{\varepsilon} \int_0^{\sin^{-1} \varepsilon} \cos^2 \phi d\phi = 4\pi \frac{ab}{\varepsilon} \int_0^{\sin^{-1} \varepsilon} \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi \\ &= 4\pi \frac{ab}{\varepsilon} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4} \right]_0^{\sin^{-1} \varepsilon} = 2\pi \frac{ab}{\varepsilon} \left(\sin^{-1} \varepsilon + \frac{\sin(2 \sin^{-1} \varepsilon)}{2} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

を得る。

ここで、 $\sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi$ より、

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \frac{ab}{\varepsilon} \left(\sin^{-1} \varepsilon + \underbrace{\sin(\sin^{-1} \varepsilon)}_{\varepsilon} \underbrace{\cos(\sin^{-1} \varepsilon)}_{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \\ &= 2\pi \frac{ab}{\varepsilon} \left(\sin^{-1} \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) = 2\pi \frac{ab}{\varepsilon} \left(\sin^{-1} \varepsilon + \varepsilon \frac{b}{a} \right) \quad \left(\because \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \\ &= 2\pi b^2 \left(1 + \frac{a \sin^{-1} \varepsilon}{b \varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

を得る。

演習問題 7

1. 講義 (ノート) で与えた、井戸型+クーロン場の場合の作用積分の値、

$$W(E_\alpha) = R\sqrt{\frac{\mu B}{2}} \left(\pi\sqrt{\frac{B}{E_\alpha}} - 4 \right) \quad (60)$$

を導け。但し $E_\alpha \ll B$ とし、記号は講義 (ノート) に準ずる。

2. 講義 (ノート) で与えた、逆転調和振動子の場合の作用積分の値、

$$W(E) = \frac{\pi(B-E)}{\omega} \quad (61)$$

を導け。但し記号は講義 (ノート) に準ずる。

3. 対エネルギーを無視したベーテ・ワイゼッカーの質量公式を用いて、 β -安定線の式、

$$Z = \frac{A}{2 + \left(\frac{a_C}{a_a}\right) A^{2/3}} \approx \frac{A}{2 + 0.015A^{2/3}} \quad (62)$$

を導け。

4. 対エネルギーを無視したベーテ・ワイゼッカーの質量公式を用いて、対称核分裂が起こる条件式、

$$f \equiv \frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \cdot \frac{a_S}{a_C} \approx 17.4 \quad (63)$$

を導け。

計算・メモ用余白