8　フェルミガス模型

質量公式や原子核の基本的性質を核子多体系という微視的観点から理解する上で、最も簡単なフェルミガス模型は有益である。フェルミガス模型とは、原子核を自由なフェルミ粒子の多体系として扱う模型である。

原子核中では、核子-核子散乱は、散乱後の核子の状態が既に他の核子により占有されている場合、パウリの排他原理により禁止される。このことは、核子が他の核子の影響を受けずに自由に(独立に)運動する確率が高くなる事を意味する。したがって、核力の効果を平均ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ で置き換え、核子は他の核子の影響を受けずに独立に $U(\boldsymbol{r})$ 中を運動するという**平均場近似** (mean field approximation) あるいは**独立粒子模型** (independent particle model) が成立し、この近似の極端な場合がフェルミガス模型に相当する。

フェルミガス模型では $U(\boldsymbol{r})$=一定にとり、これはエネルギーの基準を変えるだけであるので、自由な核子の運動と同じになる。他方、原子核の殻構造等を理解するためには、より現実的な平均場を考える必要がある。その基本となるのは、解析的に解ける調和振動子型ポテンシャルである。本章ではフェルミガス模型について概観し、次章で調和振動子型ポテンシャルの量子論について簡単に復習する。

8.1　原子核のフェルミガス模型

自由なフェルミ粒子の多体系では、各粒子のハミルトニアン h は、

$$h = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 \tag{1}$$

であり、その固有状態と固有値は、

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) = C_k \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{2}$$

である。波動関数は (平面波であるので) 無限に広がっており、通常の規格化条件、

$$\int |\psi_k(\boldsymbol{r})|^2 \boldsymbol{dr} = |C_k|^2 \int \boldsymbol{dr} = |C_k|^2 \times \infty = 1 \tag{3}$$

は適用できない。そこで、一辺が L、体積 $V = L^3$ の立方体を繰り返しつないだものを考え、それぞれの壁のところで周期境界条件を課す。一般的な周期境界条件は、

$$\psi(x,y,z) = \psi(x+L,y,z) = \psi(x,y+L,z) = \psi(x,y,z+L) \tag{4}$$

であり、この条件から、

$$\exp(ik_xL) = \exp(ik_yL) = \exp(ik_zL) = 1 \tag{5}$$

である。したがって、n_x, n_y, n_z を任意の整数として、

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z \tag{6}$$

となり、$\boldsymbol{k}$ は飛び飛びの値となるが、$L \to \infty$ では連続的になる。規格化を 1 つの立方体で行う事にすると、$C_k = 1/\sqrt{V} = 1/\sqrt{L^3}$ である。

スピン 1/2 のフェルミ粒子の 1 粒子状態は、空間状態を表す式 (2) とスピン状態 $|\pm\rangle$ の積、

$$\psi_k(\boldsymbol{r})\,|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,|\pm\rangle\,, \quad |\pm\rangle = |s=\frac{1}{2}, s_z=\pm\frac{1}{2}\rangle \tag{7}$$

で表される。パウリの排他原理から、2 つのフェルミ粒子が同じ 1 粒子状態を占有することは出来ない。したがって、N 粒子系の基底状態はエネルギーが低い 1 粒子状態から順に N 個の状態が占有された状態である。このとき、占有された状態のうち最大の k を**フェルミ波数**と呼び k_F で表す。また、k_F に対応する運動エネルギーを**フェルミエネルギー**と呼び ε_F と表す。占有された 1 粒子状態の数は粒子数に等しいので、

$$N = \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z}\sum_{m_s=\pm 1/2} 1 = 2\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} 1 \tag{8}$$

である。ただし、和は、

$$k = (k_x^2+k_y^2+k_z^2)^{1/2} = \frac{2\pi}{L}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{1/2} \le k_F \tag{9}$$

の条件を満たす (n_x, n_y, n_z) に対して行う。

ここで、和を $\boldsymbol{k}$ の積分に置き換える事を考える。例えば、k_x は $\Delta k_x = 2\pi/L$ おきに等間隔で並んでいる。したがって、

$$\sum_{n_x} = \frac{L}{2\pi}\sum_{k_x}\Delta k_x \xrightarrow{L\to\infty} \frac{L}{2\pi}\int dk_x \tag{10}$$

である。n_y, n_z についても同様であり、$dk_x\,dk_y\,dk_z = \boldsymbol{dk}$ であるので、

$$N = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{k\le k_F} \boldsymbol{dk} = \frac{V}{4\pi^3}\frac{4\pi}{3}k_F^3 \tag{11}$$

である。また、運動エネルギーの和 $E_{\rm kin}$ は、

$$E_{\rm kin} = 2\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\hbar^2k^2}{2m} = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int_{k\le k_F}\frac{\hbar^2k^2}{2m}\boldsymbol{dk} = \frac{V}{5\pi^2}\frac{\hbar^2k_F^5}{2m} = \frac{3}{5}\underbrace{\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}}_{\varepsilon_F}N \tag{12}$$

となる。これは、粒子の平均運動エネルギーがフェルミエネルギー ε_F の 3/5 となることを示している。

ここで、陽子数 Z、中性子数 N の原子核を考える。陽子、中性子のフェルミ波数をそれぞれ k_F^p、k_F^n とする。原子核は半径 $r_0A^{1/3}$ $(A=N+Z)$ の球とみなせるので、その体積は、

$$V = \frac{4\pi r_0^3}{3}A, \quad r_0 = 1.12\,\mathrm{fm} \tag{13}$$

である。したがって、式 (11) から、

$$k_F^p = \left(3\pi^2\frac{Z}{V}\right)^{1/3} = \frac{1}{r_0}\left(\frac{9\pi}{4}\frac{Z}{A}\right)^{1/3} = k_F\left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3}, \quad k_F^n = k_F\left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3} \tag{14}$$

が分かる。ただし、

$$k_F = \frac{1}{r_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \simeq 1.36\,\mathrm{fm}^{-1} \tag{15}$$

である。

$N = Z = A/2$ の場合、$k_F^p = k_F^n = k_F$ になる。このときのフェルミエネルギー ε_F は、

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{(\hbar c k_F)^2}{2mc^2} \simeq 36\,\mathrm{MeV} \tag{16}$$

と求まる。ここで、核子あたりの平均結合エネルギー E_B が約 8 MeV であったことを思い出すと、原子核の平均ポテンシャル U として、

$$U = -(E_B + \varepsilon_F) \simeq -44\,\mathrm{MeV} \tag{17}$$

を得る。フェルミガス模型によるこの値は、実際の原子核の性質を再現するように求めた一体ポテンシャルの深さとほぼ一致する。また、核子あたりの平均エネルギーは $(3/5)\varepsilon_F$ であるので、ポテンシャル中での平均速度 v は、

$$\frac{3}{5}\varepsilon_F = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{\varepsilon_F}{mc^2}}c \simeq 0.2c \tag{18}$$

と、光速の約 20%程度であることが分かる。

8.2　質量公式との対応

式 (12) から、陽子数 N、中性子数 N の原子核の E_{kin} は、

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2 (k_F^p)^2}{2m}Z + \frac{3}{5}\frac{\hbar^2 (k_F^n)^2}{2m}N = \frac{3}{5}\varepsilon_F \left[\left(\frac{2Z}{A}\right)^{2/3} + \left(\frac{2N}{A}\right)^{2/3}\right] \tag{19}$$

と表される。ここで、

$$x \equiv \frac{N-Z}{A} \tag{20}$$

とすると、$Z = (1-x)A/2$、$N = (1+x)A/2$ であるので、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} &= \frac{3}{5}\varepsilon_F \frac{A}{2}\left[(1-x)^{5/3} + (1+x)^{5/3}\right] \\ &= \frac{3}{5}\varepsilon_F A \left[1 + \frac{1}{2!}\frac{5}{3}\frac{2}{3}x^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{3}{5}\varepsilon_F A + \frac{2}{3}\varepsilon_F \frac{(N-Z)^2}{2A} + \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

を得る。

$A \gtrsim 40$ の原子核は一般に $N > Z$ の中性子過剰な原子核である。核力のアイソスピン依存性を考慮すると、中性子と陽子は若干異なる平均ポテンシャル中にあると考えられる。そこで、中性子と陽子に対する平均ポテンシャルを

$$V = V_0 + \frac{1}{2}t_3 \frac{N-Z}{A}V_1, \quad t_3 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{中性子} \\ -\frac{1}{2} & \text{陽子} \end{cases} \tag{22}$$

とおく。独立粒子模型の範囲では、系全体のポテンシャルエネルギー U は各粒子 (1 粒子状態) に対するポテンシャルエネルギーの和の半分である [1] ので、

$$U = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(V_0 + \frac{1}{4}\frac{N-Z}{A}V_1\right) + \sum_{i=1}^{Z}\left(V_0 - \frac{1}{4}\frac{N-Z}{A}V_1\right)\right] = \frac{V_0}{2}A + \frac{V_1}{4}\frac{(N-Z)^2}{2A} \tag{23}$$

[1] 二体力 (核力) のポテンシャルを v_{ij} とすると $\sum_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} v_{ij}$ である。

である。したがって、系全体のエネルギー E は、運動エネルギー E_{kin} を加えて、

$$E = \left(\frac{V_0}{2} + \frac{3}{5}\varepsilon_F\right) A + \left(\frac{V_1}{4} + \frac{2}{3}\varepsilon_F\right) \frac{(N-Z)^2}{2A} \tag{24}$$

となり、質量公式の体積項と対称エネルギー項が現れていることが分かる。結合エネルギー E_B との対応は $E_B = -E$ であるので、質量公式との対応は、

$$-a_V = \underbrace{\frac{V_0}{2}}_{\simeq -37\,\mathrm{MeV}} + \underbrace{\frac{3}{5}\varepsilon_F}_{\simeq +22\,\mathrm{MeV}}, \quad a_a = \underbrace{\frac{V_1}{4}}_{\simeq +23\,\mathrm{MeV}} + \underbrace{\frac{2}{3}\varepsilon_F}_{+24\,\mathrm{MeV}} \tag{25}$$

である。$a_V = 15.56\,\mathrm{MeV}$、$a_a = 46.58\,\mathrm{MeV}$、$\varepsilon_F = 36\,\mathrm{MeV}$ であるので、$V_0 \simeq -74\,\mathrm{MeV}$、$V_1 \simeq +90\,\mathrm{MeV}$ になる。体積エネルギーは核力の強い引力によってもたらされ、運動エネルギーの寄与はこれを弱める働きをすることが分かる。これに対して対称エネルギーは、核力と運動エネルギーがほぼ同程度の寄与をすることが分かる。

演習問題 8

1. 原子核のフェルミガス模型を考える。核子数を変えずに原子核の体積を 2 倍にすると、フェルミ運動量は何倍になるか答えよ。

計算・メモ用余白